# DM

On rappelle qu'un groupe $G$ est dit *simple* si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et $G$. Le but de ce DM est d'établir la simplicité d'une famille infinie de groupes finis, les groupes alternés $\mathfrak{A}_n$ (pour $n \geq 5$) et d'un groupe infini, le groupe $\mathrm{SO}(3)$ des rotations de l'espace vectoriel euclidien à trois dimensions.

## Classes de conjugaison dans $\mathfrak{A}_n$

Soit $n \geq 2$. Dans les questions suivantes, on note $\mathcal{CS}(\sigma)$ la classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ d'une permutation $\sigma$ et $\mathcal{CA}(\sigma)$ la classe de conjugaison dans $\mathfrak{A}_n$ d'une permutation paire $\sigma$.

**1.** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Rappeler sans démonstration quels sont les éléments de $\mathcal{CS}(\sigma)$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$.

**2.** Montrer que $\mathcal{CS}(\sigma) = \mathcal{CA}(\sigma) \cup \mathcal{CA}(\tau^{-1}\sigma\tau)$.

**3.** Montrer que $\mathcal{CA}(\sigma)$ et $\mathcal{CA}(\tau^{-1}\sigma\tau)$ ont le même cardinal et qu'elles sont égales ou disjointes.

**4.** Montrer que $\mathcal{CA}(\sigma) = \mathcal{CS}(\sigma)$ si et seulement si $\exists \rho \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n : \rho^{-1}\sigma\rho = \sigma$.

**5.**

a. Si la décomposition de $\sigma$ en cycles disjoints contient un cycle de longueur paire, montrer que $\mathcal{CS}(\sigma) = \mathcal{CA}(\sigma)$.

b. Si cette décomposition contient deux cycles de même longueur impaire (un point fixe est un tel cycle, de longueur 1), montrer que $\mathcal{CS}(\sigma) = \mathcal{CA}(\sigma)$.

c. Dans tous les autres cas, montrer que $\mathcal{CS}(\sigma) \neq \mathcal{CA}(\sigma)$. (*Indication :* on pourra commencer par déterminer l'ensemble des permutations qui commutent avec un cycle donné.)

## Simplicité du groupe alterné $\mathfrak{A}_5$

**6.** Donner la liste des classes de conjugaison dans $\mathfrak{A}_5$ avec leur cardinal.

**7.** En déduire que le groupe $\mathfrak{A}_5$ est simple. (*Indication :* un sous-groupe distingué est une union de classes de conjugaison.)

## Simplicité du groupe alterné $\mathfrak{A}_n$, $n > 5$

On va maintenant utiliser cette simplicité pour démontrer celle des groupes alternés plus grands. Soit $n > 5$ et $H \subset \mathfrak{A}_n$ un sous-groupe distingué non réduit à l'identité.

**8.** Montrer que les 3-cycles sont tous conjugués dans $\mathfrak{A}_n$. En déduire que si $H$ contient un 3-cycle, $H = \mathfrak{A}_n$.

**9.** Montrer que si $H$ contient une permutation non triviale ayant au moins $n-5$ points fixes, $H = \mathfrak{A}_n$.

**10.** Soit $\sigma \in H$ différent de l'identité. Montrer qu'il existe un 3-cycle $\tau$ tel que $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$ ait au moins $n-5$ points fixes tout en n'étant pas trivial. En déduire que le groupe $\mathfrak{A}_n$ est simple.

**11.** Les groupes $\mathfrak{A}_3$ et $\mathfrak{A}_4$ sont-ils simples ?

**12.** Montrer que pour $n \geq 5$, les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{\mathrm{id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.

### $\mathfrak{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre 60

Soit $G$ un groupe simple d'ordre 60. On va montrer que $G$ est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$.

**13.** Montrer que $G$ a six 5-sous-groupes de Sylow.

**14.** En déduire un morphisme injectif $\Phi : G \to \mathfrak{S}_6$. Montrer que l'image de ce morphisme est incluse dans $\mathfrak{A}_6$. On note $H$ l'image de ce morphisme, qui est un sous-groupe d'indice 6 dans $\mathfrak{A}_6$.

**15.** $\mathfrak{A}_6$ agit par multiplication à gauche sur l'ensemble $\mathfrak{A}_6/H$ de classes à gauche. Cela donne un morphisme $\Psi : \mathfrak{A}_6 \to \mathrm{Bij}(\mathfrak{A}_6/H)$. Montrer que ce morphisme est injectif et déterminer son image.

**16.** Déduire de ce qui précède que $H$, et donc $G$, sont isomorphes à $\mathfrak{A}_5$.

### Simplicité de $\mathrm{SO}(3)$

Soit $\mathrm{SO}(3)$ le groupe des rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$. On appelle *renversement* toute rotation d'un demi-tour autour d'une droite de $\mathbb{R}^3$. On note $S^2$ la sphère $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \|x\| = 1\right\}$.

Soit $H \subset \mathrm{SO}(3)$ un sous-groupe distingué différent de $\{\mathrm{id}\}$.

**17.** Montrer que si $\rho \in \mathrm{SO}(3)$ vérifie $\exists x \in S^2 : \rho(x) = -x$, c'est un renversement. (*Indication :* on pourra chercher à exprimer simplement les éléments de $\mathrm{SO}(3)$ dans une base adaptée).

**18.** Montrer que les renversements engendrent $\mathrm{SO}(3)$. (*Indication :* on pourra commencer par montrer que, dans le plan, toute rotation est le produit de deux réflexions.)

**19.** Montrer que si $H$ contient un renversement, $H = \mathrm{SO}(3)$.

**20.** Soit $\rho \in \mathrm{SO}(3)$ une rotation non triviale. Montrer que l'ensemble de distances $\left\{\|\rho(x) - x\| \,\middle|\, x \in S^2\right\}$ est un segment $[0, d(\rho)]$, avec $d(\rho) > 0$. Que vaut $d(\rho)$ ?

**21.** On prend deux couples $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ d'éléments de $S^2$. Montrer que si $\|x_1 - y_1\| = \|x_2 - y_2\|$, il existe un élément de $\mathrm{SO}(3)$ envoyant $x_1$ sur $x_2$ et $y_1$ sur $y_2$.

**22.** Soit $\rho \in H \setminus \{\mathrm{id}\}$. On prend $x$ et $y$ dans $S^2$ tels que $\|x - y\| \leq d(\rho)$. Montrer qu'il existe un élément de $H$ envoyant $x$ sur $y$.

**23.** En déduire qu'il existe un renversement dans $H$ et conclure.