ÉNS Lyon
L3

Algèbre 1
2010–2011

DM 2

L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + bi\sqrt{2}\ ;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, sur lequel on définit une application norme, N, donnée par

$$N(a + bi\sqrt{2}) = a^2 + 2b^2 \in \mathbb{N}.$$

1. Vérifier que l'application N est multiplicative.

2. Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

3. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est euclidien pour la norme, c'est-à-dire que l'application $N : \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ est un stathme euclidien.

L'équation diophantienne $x^2 + 2 = y^3$.

On souhaite montrer que les seuls couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 + 2 = y^3$ sont les couples $(\pm 5, 3)$.

4. Dans l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, montrer que l'élément $i\sqrt{2}$ est irréductible.

5. Soit (x, y) une solution de l'équation $X^2 + 2 = Y^3$. Soit $\mathfrak{q}$ l'idéal de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ engendré par les éléments $x + i\sqrt{2}$ et $x - i\sqrt{2}$.

a. Montrer que l'idéal $\mathfrak{q}$ contient $2i\sqrt{2}$.

b. En déduire qu'il existe un entier m, avec $0 \leq m \leq 3$, tel que l'idéal $\mathfrak{q}$ est engendré par $(i\sqrt{2})^m$.

c. Montrer que le cas $m \neq 0$ est impossible.
Pour cela, on pourra montrer l'implication : $m \neq 0 \Rightarrow y^3 \equiv 2 \bmod 4$.

d. En déduire que les éléments $x + i\sqrt{2}$ et $x - i\sqrt{2}$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

e. En considérant la factorisation de y^3 dans l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, montrer alors que $x + i\sqrt{2}$ est un cube dans cet anneau.

f. En déduire : $x = \pm 5$ et $y = 3$.

L'anneau $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2-Y^3)$.

Cet exercice est indépendant des exercices précédents.

6. Soit A un anneau factoriel ; on note $\mathrm{Frac}(A)$ son corps des fractions.
Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Si $r = \frac{p}{q}$ est une racine de P dans $\mathrm{Frac}(A)$, avec p et q premiers entre eux dans A, montrer que p divise a_0 et q divise a_n.

7. Soit B un anneau intègre, et soit A un sous-anneau de B. On dit qu'un élément $b \in B$ est *entier* sur A s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans A. Un anneau intègre A est dit *intégralement clos* si les seuls éléments de $\mathrm{Frac}(A)$ entiers sur A sont les éléments de A.

Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos. On pourra utiliser la question 6.

8. Soit $A = \mathbb{C}[X,Y]/(X^2-Y^3)$. On note x et y les projections de X et Y dans A.

a. Montrer que l'anneau A est intègre.
   On pourra utiliser la question 6 pour montrer que le polynôme $X^2 - Y^3$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X,Y] = \mathbb{C}[Y][X]$.

b. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux ϕ de A dans $\mathbb{C}[T]$ tel que $\phi(x) = T^3$ et $\phi(y) = T^2$.

c. Montrer que l'application ϕ est injective et que son image est le sous-anneau $\mathbb{C}[T^2, T^3]$ de $\mathbb{C}[T]$.
   Pour montrer l'injectivité de ϕ, on pourra penser à l'exercice 2 du TD 8.

d. Montrer que le corps des fractions de A est isomorphe à $\mathbb{C}(T)$.

e. À l'aide de la question 7, montrer alors que l'anneau A n'est pas factoriel.

f. L'anneau A est-il noethérien ?