TD 2

Exercice 1. Soit G un groupe et soit H un sous-groupe distingué de G.

1. (a) Montrer que tout sous-groupe de G/H est isomorphe à K/H pour un certain sous-groupe K de G tel que $H \subset K \subset G$.
   (b) Montrer qu'il y a une bijection entre les sous-groupes de G/H et les sous-groupes de G contenant H.
2. Soit maintenant K un sous-groupe quelconque de G.
   (a) Montrer que l'ensemble $KH = \{kh; k \in K, h \in H\}$ est un sous-groupe de G (et qu'il coïncide avec l'ensemble HK). Donner un contre-exemple dans le cas où H n'est pas distingué dans G.
   (b) Montrer que $K \cap H$ est distingué dans K.
   (c) Montrer l'existence d'un isomorphisme $KH/H \cong K/(K \cap H)$.

Exercice 2. Soit G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et K un sous-groupe de G. Notons $\pi : G \to G/H$ la projection naturelle. À quelle condition la restriction de π à K est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3. Soit π la projection naturelle du groupe additif $\mathbf{R}^2$ sur son quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^2)$. À quelle condition l'endomorphisme f passe-t-il au quotient, c'est-à-dire il existe un morphisme de groupes $\overline{f} : \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ tel que $\overline{f} \circ \pi = \pi \circ f$?

Exercice 4. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini E. Pour tout $g \in G$, on pose $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in E, g \cdot x = x\}$.

1. Montrer que la moyenne des cardinaux $\mathrm{card}(\mathrm{Fix}(g))$ (lorsque g parcourt G) est égale au nombre d'orbites de E sous l'action de G.

   Indication : on pourra considérer l'ensemble $\{(g, x) \in G \times E,\ g \cdot x = x\}$.
2. Soit n un entier ≥ 2. Déduire de (1) que tout sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ agissant transitivement sur $\{1, \ldots, n\}$ possède une permutation sans point fixe.

Exercice 5. Normalisateur d'un sous-groupe. Soit G un groupe. Si H est un sous-groupe de G, on appelle *normalisateur* de H dans G l'ensemble $N_H = \{x \in G,\ xHx^{-1} = H\}$. Le but de cet exercice est d'étudier plusieurs propriétés de cet ensemble.

1. *Normalisateur et sous-groupes distingués.*
   (a) Soit H un sous-groupe de G. Montrer que N_H est un sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
   (b) Si K est un sous-groupe de G contenant H et tel que H est distingué dans K, montrer : $K \subset N_H$. En déduire que N_H est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.

(c) Si K est un sous-groupe de N_H, alors KH est un groupe et H est distingué dans KH.

2. *Normalisateur et action par conjugaison.*
   (a) Montrer que l'application $(g, H) \mapsto gHg^{-1}$ définit une action du groupe G sur l'ensemble de ses sous-groupes.
   (b) Quel est le stabilisateur d'un sous-groupe de G pour cette action ?
   (c) Dans cette question, on suppose G fini. Montrer que le nombre de sous-groupes conjugués à un sous-groupe H est égal à l'indice de N_H dans G.
   (d) Montrer que deux sous-groupes conjugués ont des stabilisateurs conjugués.
3. *Exemples.*
   (a) Dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$, considérons les permutations $\tau = (12)$ et $\gamma = (123)$. On note $H = \{1, \tau\}$ le sous-groupe engendré par τ, et $N = \{1, \gamma, \gamma^2\}$ celui engendré par γ. Donner les normalisateurs de H et N dans $\mathfrak{S}_3$.
   (b) Soit K un corps et soit $n \geq 1$ un entier. On considère le groupe $G = \mathrm{GL}_n(K)$ et on pose (voir l'exercice 15 du TD 0) :
   – T le sous-groupe des matrices à coefficients diagonaux non nuls ;
   – N le sous-groupe des matrices qui possèdent un et un seul coefficient non nul par ligne et par colonne.
   Montrer que N est le normalisateur de T dans $\mathrm{GL}_n(K)$ et que le groupe quotient N/T est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 6. Soit G un groupe et soit A un sous-groupe distingué abélien.
1. Montrer que le groupe quotient G/A opère sur A par conjugaison.
2. En déduire un homomorphisme de G/A dans le groupe $\mathrm{Aut}(A)$.

Exercice 7. Soit p un nombre premier et soit $n \geq 1$ un entier.
1. Calculer le nombre de droites dans $\mathbb{F}_p^n$.
2. Calculer le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. On pourra raisonner par récurrence sur n.
3. Calculer le nombre de sous-espaces vectoriels de dimension k dans $\mathbb{F}_p^n$.

Exercice 8.
1. Montrer que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4)$ s'injecte dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$.
2. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4)$ est de cardinal 60.
3. En déduire un isomorphisme de groupes $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$.

Exercice 9.
1. Soit A un groupe abélien noté multiplicativement. On munit $G = A \times \{1, -1\}$ de la loi $(a, e) \cdot (b, f) = (ab^e, ef)$ où, comme la notation le suggère, b^e vaut b ou b^{-1} selon que e vaut 1 ou -1. Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.
2. On suppose maintenant A fini, d'ordre n. Montrer que G est alors fini, d'ordre $2n$ et qu'il contient au moins n éléments d'ordre 2. Donner une condition suffisante pour qu'il en contienne au moins $n + 1$.
3. Soit $K = D_4 \times D_4$. Montrer que K n'est pas abélien et qu'une majorité absolue de ses éléments sont d'ordre 2. Montrer qu'il n'est pas obtenu par la construction de la première question.