ÉNS Lyon — Algèbre 1
L3 — 2010–2011

TD 4

Dans toute cette feuille, on pourra utiliser la version du théorème de Sylow énoncée dans l'exercice 10 de la feuille 3.

Exercice 1. Soient G un groupe fini, p un nombre premier divisant l'ordre de G et S un p-Sylow de G. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) S est l'unique p-Sylow de G ;

(ii) S est stable par tout automorphisme de G ;

(iii) S est distingué dans G.

Exercice 2. Soient p et q deux nombres premiers distincts ; on suppose q strictement supérieur à p. Soient G un groupe d'ordre pq et Q un sous-groupe d'ordre q de G.

1. Montrer que Q est distingué dans G ; en déduire un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{Aut}(Q)$.
2. Quel est l'ordre du groupe $\mathrm{Aut}(Q)$?
3. On suppose que p ne divise pas $q-1$; montrer que G est cyclique.

Exercice 3. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1. On suppose n supérieur ou égal à 3 ; montrer que le centre de $\mathfrak{S}_n$ est $\{\mathrm{id}\}$.
2. Soit K un corps ; déterminer le centre de $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$.
3. Montrer que les groupes $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ et $\mathfrak{S}_4$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 4. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

1. En considérant les produits de deux transpositions, montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les cycles de longueur 3 de $\mathfrak{S}_n$.
2. En déduire que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les carrés de $\mathfrak{S}_n$.
3. Tout élément de $\mathfrak{A}_n$ est-il le carré d'un élément de $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 5. Soit G un groupe ; on appelle *groupe dérivé* de G le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$, où g et h décrivent G.

1. Montrer que le groupe dérivé de G est un sous-groupe distingué de G.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 ; montrer que le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 5.

3. Montrer que les cycles de longueur 3 sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.
4. Montrer que le groupe dérivé de $\mathfrak{A}_n$ est $\mathfrak{A}_n$ lui-même.

Exercice 6.

1. Donner les éléments et les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$.

Soit K la partie de $\mathfrak{S}_4$ formée de l'identité et des produits de deux transpositions à supports disjoints.

2. Montrer que K est un sous groupe distingué de $\mathfrak{S}_4$, isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Montrer que les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$ sont $\{\mathrm{id}\}$, K, $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{S}_4$. Déterminer les quotients associés.
4. Donner le nombre, la structure et la liste des 3-Sylow de $\mathfrak{S}_4$.
5. Montrer que $\mathfrak{S}_4$ possède trois 2-Sylow et qu'ils sont tous isomorphes à D_4.
6. Montrer que tout 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$ est engendré par K et une transposition.
7. Montrer que tout 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$ est engendré par un cycle de longueur 4 et une transposition.

Exercice 7.

1. Donner les éléments et les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_4$.
2. Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{A}_4$ et les quotients associés.
3. Montrer que $\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.
4. Donner le nombre, la structure et la liste des 2-Sylow et 3-Sylow de $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 8. Soit X un ensemble et G un groupe agissant sur X. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal au cardinal de X, on dit que G agit k-transitivement si pour tous $x_1, \ldots, x_k$ et $y_1, \ldots, y_k$ des k-uplets d'éléments distincts de X, il existe g dans G tel que pour tout i, $gx_i = y_i$.

1. Qu'est-ce qu'une action 1-transitive ?
2. Montrer que si G agit k-transitivement sur X, alors il agit l-transitivement pour tout $l \leq k$.
3. Donner un exemple de groupe agissant transitivement sur un ensemble, mais pas 2-transitivement.
4. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ agit n-transitivement sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Soit G un groupe agissant fidèlement et n-transitivement sur un ensemble X à n éléments, montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.
5. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ agit $(n-2)$-transitivement mais pas n-transitivement sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Exercice 9. Déterminer les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_5$. En déduire que les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{A}_5$ sont $\{\mathrm{id}\}$ et $\mathfrak{A}_5$ (on dit que $\mathfrak{A}_5$ est *simple*).

Exercice 10. Soient G un groupe fini et V une représentation linéaire de G sur $\mathbb{C}$ de dimension 2 ou 3.

1. Montrer que V est irréductible si et seulement si V ne contient pas de vecteur propre commun à tous les éléments de G.
2. Soit ρ le morphisme de groupes de D_4 dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ qui a toute isométrie du carré associe sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (ρ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$). Montrer que la représentation $(\mathbb{C}^2, \rho)$ de D_4 est irréductible.