TD 5 ET 6

Sauf mention du contraire, dans toute cette feuille, on désignera par G un groupe fini et on ne considérera que des représentations de G sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Exercice 1. Montrer que si toutes ses représentations irréductibles sont de dimension 1, alors G est commutatif. Que dire de la réciproque ?

Exercice 2. Soit G un groupe fini et soit A un sous-groupe abélien de G. Montrer que les degrés des caractères irréductibles de G sont inférieurs ou égaux à l'indice de A dans G. Retrouver le fait que les caractères d'un groupe abélien sont de degré 1.

Exercice 3 (Symbole de Legendre). Soit p un nombre premier. On note $G(p) = \mathbb{F}_p^\times$ le groupe multiplicatif du corps $\mathbb{F}_p$ et $H(p)$ le sous-ensemble formé des carrés de $G(p)$.

1. Pourquoi $G(2) = H(2)$?
2. On suppose maintenant $p \neq 2$.
   (a) Montrer que $H(p)$ est un sous-groupe de $G(p)$, d'ordre $(p-1)/2$.
   (b) Montrer que l'application $\chi : G(p) \to \mathbb{C}^*$ donnée par :
   $$\begin{cases} \chi(x) = 1 & \text{si} \quad x \in H(p) \\ \chi(x) = -1 & \text{si} \quad x \notin H(p), \end{cases}$$
   est un caractère du groupe $G(p)$. (Ce caractère est appelé *caractère de Legendre*.)
   (c) Montrer : $\chi(x) \equiv x^{(p-1)/2} (\mathrm{mod}\ p)$, pour tout $x \in G(p)$.
   (d) En déduire l'équivalence : $-1 \in H(p) \Leftrightarrow p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Exercice 4 (Tables de caractères). Pour chacun des groupes suivants, déterminer ses classes de conjugaison et donner sa table de caractères irréductibles :

1. le groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$;
2. le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$;
   On pourra réaliser $\mathfrak{S}_3$ comme le groupe des symétries d'un triangle équilatéral.
3. le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
   On pourra réaliser $\mathfrak{A}_4$ comme le groupe des symétries directes (c'est-à-dire de déterminant 1) d'un tétraèdre régulier.

Exercice 5 (Caractères linéaires de $\mathfrak{S}_n$).

1. Soit V une représentation d'un groupe fini G, de caractère χ. Rappeler pourquoi $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ pour tout g dans G.

2. Soit $n \geq 1$. Montrer que le caractère associé à une représentation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est réel.
3. Montrer que les seuls caractères linéaires de $\mathfrak{S}_n$ sont le caractère trivial et la signature ε.

Exercice 6 (Caractères du groupe des quaternions). Soit $Q = \{\pm 1, \pm x, \pm y, \pm z\}$ le groupe des quaternions, avec $x^2 = y^2 = -1$ et $xy = -yx = z$, $zx = -xz = y$, $yz = -zy = x$.

1. Montrer que le groupe Q a 5 classes de conjugaison.
2. On considère le sous-groupe $K = \{\pm 1\}$. Montrer que K est distingué dans Q.
3. Montrer que le groupe Q/K a 4 caractères irréductibles et que chacun peut définir un caractère irréductible de Q.
4. Montrer qu'il existe un seul caractère irréductible supplémentaire de Q et que ce dernier est de degré 2. Montrer que la représentation correspondante ρ admet la représentation matricielle :
$$\rho(x) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \rho(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(z) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$
5. Donner la table des caractères de Q.
6. Comparer cette table avec la table des caractères du groupe diédral D_4, groupe d'ordre 8 engendré par deux éléments σ et τ tels que $\sigma^4 = 1$, $\tau^2 = 1$ et $\tau\sigma\tau = \sigma^3$.

Exercice 7. Soit G un groupe fini non trivial. Montrer que G est simple si et seulement si pour tout caractère irréductible $\chi \neq \mathbf{1}$, et pour tout $x \in G$, on a : $\chi(x) \neq \chi(1)$.

Exercice 8. Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe G. Soit $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction centrale. Montrer que si ρ est irréductible, l'application $\mathbb{C}$-linéaire de V dans lui-même $\sum_{g \in G} \overline{f(g)}\rho(g)$ est une homothétie dont le rapport λ est donné par la formule :
$$\lambda = \frac{1}{\dim(V)} \sum_{g \in G} \overline{f(g)}\chi(g) = \frac{|G|}{\dim V}\langle f, \chi \rangle,$$
où χ est le caractère associé à ρ.

Exercice 9. Soit V une représentation d'un groupe G. Soient W, Z deux sous-représentations irréductibles. On définit $W' = W \cap Z^\perp$ et $Z' = Z \cap W^\perp$.

1. Montrer que W' est égal à $\{0\}$ ou à W. En déduire l'alternative
   - ou bien $W \perp Z$,
   - ou bien $V = Z \oplus W^\perp = W \oplus Z^\perp$.
2. Dans le deuxième cas, on définit la projection orthogonale $\pi : V \to W$. Montrer que la restriction de π à Z est un isomorphisme entre les représentations Z et W.
3. En déduire que, dans la décomposition de V en sous-représentations irréductibles orthogonales, la somme directe $\widehat{W}$ des représentations isomorphes à W ne dépend pas du choix de la décomposition.

4. À quelle condition sur les multiplicités la décomposition de V en sous-représentations irréductibles est-elle unique ?
5. Donner une formule pour la projection sur le sous-espace $\widehat{W}$ (on pourra utiliser l'exercice 8).

Exercice 10. Soit $\mathbb{C}[G]$ l'espace vectoriel de dimension $|G|$, dont la base est notée $\{e_g; g \in G\}$. Soit $(\rho_1, W_1), \ldots, (\rho_r, W_r)$ la liste des représentations irréductibles de G, à isomorphisme près.

1. Soit $a = \sum_g a_g e_g \in \mathbb{C}[G]$. On suppose que, pour tout $j = 1, \ldots r$, on a
$$\sum_{g \in G} a_g \rho_j(g) = 0_{W_j}.$$
   (a) Montrer que pour toute représentation (ρ, V) de G, on a
$$\sum_{g \in G} a_g \rho(g) = 0_V.$$
   (b) Choisissant convenablement une représentation V, montrer que $a = 0$.
2. En déduire que l'application
$$\pi : \mathbb{C}[G] \to \prod_{j=1}^{r} \mathrm{End}(W_j),$$
définie par
$$\pi(a) = \left(\sum_{g \in G} a_g \rho_1(g), \ldots, \sum_{g \in G} a_g \rho_r(g) \right)$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 11. Soit V une représentation irréductible d'un groupe G. Soient $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $(\cdot, \cdot)$ deux produits scalaires hermitiens sur V pour lesquels la représentation est unitaire.

1. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ telle que $[\cdot, \cdot] = \langle \cdot, \cdot \rangle - \lambda(\cdot, \cdot)$ soit semi-définie positive, mais pas définie positive.
2. Montrer que la condition $[x, x] = 0$ définit un sous-espace vectoriel de V, qui est une sous-représentation.
3. En déduire que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $(\cdot, \cdot)$ sont proportionnels. Montrer que ce résultat n'est plus vrai si V est réductible.

Exercice 12 (Représentation de permutation). Soit G un groupe fini agissant sur l'ensemble fini X. On appelle représentation de permutation associée à X la représentation sur l'espace vectoriel $V_X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C} e_x$ donnée par $\rho(g)(e_x) = e_{gx}$.

1. Soit $g \in G$, montrer que $\chi_{V_X}(g)$ est le nombre de points fixes de g agissant sur X.
2. Montrer que $\frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} \chi_{V_X}(g)$ est égal au nombre d'orbites de l'action de G sur X.

3. On suppose maintenant que X est de cardinal > 1. Montrer que V_X n'est pas une représentation irréductible de G : on a une décomposition $V_X = \mathbf{1} \oplus W$, où $\mathbf{1}$ désigne la représentation triviale. On donnera une base de $\mathbf{1}$ et de W.
4. Calculer $\langle \chi_{V_X}, \chi_{V_X} \rangle$.
5. En déduire que W est irréductible si et seulement si X est de cardinal 2 ou G agit 2-transitivement sur X.

Exercice 13 (Représentations fidèles). Une représentation ρ d'un groupe G est dite *fidèle* si ρ est injective.

1. Soit G un groupe fini. Montrer que G a au moins une représentation fidèle.
2. Montrer que tout sous-groupe distingué H peut s'écrire comme intersection de noyaux de représentations irréductibles de G.
3. En déduire que G est simple si et seulement si toutes ses représentations irréductibles non triviales sont fidèles.

Exercice 14 (Autour du théorème de Maschke). D'après le cours, si G est un groupe fini et si (ρ, V) est une représentation de G sur $\mathbb{C}$, alors le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V s'écrit comme somme directe de représentations irréductibles. En d'autres termes, toute sous-représentation de V possède au moins un supplémentaire qui est aussi une sous-représentation.

L'objectif de cet exercice est de montrer que ce résultat est faux dès que l'on modifie les hypothèses.

1. *Lorsque la caractéristique du corps divise l'ordre de G.* Soit p un nombre premier. Soit G le groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et soit K le corps $\mathbb{F}_p$. On considère un K-espace vectoriel V de dimension 2, et on note $\{e_1, e_2\}$ une K-base de V. On considère la représentation (ρ, V) définie sur K par :
$$\begin{array}{rccl} \rho : & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) \\ & \bar{j} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{pour } j \in \{0, 1, ..., p-1\}. \end{array}$$
Montrer que V admet un unique sous-espace vectoriel de dimension 1 stable par G, précisément la droite vectorielle engendrée par e_1. Conclure.
2. *Lorsque G est un groupe infini.* On considère cette fois-ci le corps $K = \mathbb{C}$ et le groupe infini :
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z} \right\}.$$
Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de base $\{e_1, e_2\}$. On considère la représentation (ρ, V) donnée par l'action naturelle de G sur V. Montrer que V admet un unique sous-espace vectoriel de dimension 1 stable par G. Conclure.