TD 7

Exercice 1. Soient k un corps et $0 \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \to 0$ une suite exacte de k-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer qu'on a $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim E_i = 0$.

Exercice 2. Soient A un anneau, M un A-module et N un sous-A-module de M. On dit que N est *facteur direct* de M s'il existe un sous-module P de M tel que tout élément de M s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de N et d'un élément de P.

1. Montrer que N est facteur direct de M si et seulement s'il existe un morphisme de A-modules de M dans N valant l'identité sur N.
2. Le sous-$\mathbb{Z}$-module $2\mathbb{Z}$ est-il facteur direct de $\mathbb{Z}$?

Exercice 3. Soient A un anneau, M un A-module et N un sous-A-module de M. Trouver les applications donnant une suite exacte naturelle de A-modules :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M/N, A) \to \mathrm{Hom}_A(M, A) \to \mathrm{Hom}_A(N, A).$$

La dernière flèche est-elle nécessairement surjective ?

Exercice 4. Un élément a d'un anneau est dit *idempotent* s'il vérifie $a^2 = a$.

1. Soient A_1 et A_2 des anneaux ; montrer que l'anneau produit $A_1 \times A_2$ contient des éléments idempotents autres que 0 et 1.
2. Soit X un espace topologique ; montrer que l'anneau des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ est isomorphe à un produit de deux anneaux si et seulement si X n'est pas connexe.
3. Soit A un anneau commutatif contenant un élément idempotent autre que 0 et 1.
   (a) Soit a un tel élément ; montrer que l'ensemble Aa muni des lois d'addition et de multiplication de A est un anneau (préciser les éléments neutres).
   (b) Donner deux anneaux A_1 et A_2 dont le produit est isomorphe à A.

Exercice 5.

1. Soient a et b deux entiers strictement positifs premiers entre eux ; à l'aide d'une relation de Bézout, expliciter la réciproque de l'application naturelle de $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$.
2. (a) Déterminer les racines carrées de -1 dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et de 2 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
   (b) Donner tous les entiers dont le carré est congru à 9 modulo 35.

Exercice 6. Soient A un anneau commutatif et I, J deux idéaux de A.

1. Décrire les idéaux (quelconques, puis premiers et maximaux) de l'anneau A/I.
2. Donner un isomorphisme naturel entre l'anneau $A/(I+J)$ et un quotient de A/I.
3. Soit φ un morphisme d'anneaux ; à quelle condition l'image directe par φ de tout idéal est-elle un idéal ?

Exercice 7. Soient A un anneau commutatif et I et J deux idéaux de A premiers entre eux ; montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, les idéaux I^n et J^n sont premiers entre eux.

Exercice 8. Soit A un anneau (commutatif) principal qui n'est pas un corps. Montrer que les idéaux maximaux sont ceux engendrés par les éléments irréductibles ; montrer que les idéaux premiers sont les idéaux maximaux et l'idéal nul.

Exercice 9. Donner les diviseurs communs à 2 et X dans $\mathbb{Z}[X]$. Décrire l'idéal engendré par ces deux éléments ; est-il principal ?

Exercice 10. Soit A un anneau commutatif intègre.

1. Montrer que les inversibles de $A[X]$ sont les polynômes constants inversibles dans A.
2. Montrer qu'un élément irréductible de A est irréductible dans $A[X]$.
3. Trouver dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$ un élément inversible de degré non nul.

Exercice 11. Soit A un anneau commutatif ; montrer que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

Exercice 12. Le but de cet exercice est de montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.

1. Montrer que le carré du module complexe définit une application multiplicative de $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathbb{N}$; dans la suite de l'exercice on note N cette application.
2. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
3. Soient a et b dans $\mathbb{Z}[i]$, avec b non nul ; montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) il existe des éléments q et r de $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant $a = qb + r$ et $\mathrm{N}(r) < \mathrm{N}(b)$;
   (ii) il existe un élément q de $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant $\left|\frac{a}{b} - q\right| < 1$.
4. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.
5. Déterminer le pgcd et une relation de Bézout pour le couple $(3+i, 1+3i)$.

Exercice 13. Soit p un nombre premier.

1. Montrer que p est réductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement s'il est somme de deux carrés (dans $\mathbb{Z}$).
2. Donner un isomorphisme naturel entre $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)\mathbb{Z}[X]$; en déduire un isomorphisme naturel entre $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{F}_p[X]/(X^2+1)\mathbb{F}_p[X]$.
3. En déduire que p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement s'il est congru à 3 modulo 4.