TD 9

Exercice 1. Donner un contre-exemple à l'assertion (fausse) : « tout sous-anneau d'un anneau noethérien est noethérien ». Même question avec « factoriel » à la place de « noethérien ».

Exercice 2. Montrer que dans un anneau noethérien, tout élément non nul et non inversible s'écrit comme produit fini d'irréductibles.

Exercice 3. Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ et $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ (faire le lien avec l'exercice 9 de la feuille 8) sont noethériens mais pas factoriels.

Exercice 4.

1. Soit A un anneau intègre ; montrer que A est factoriel si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :
   - (i) toute suite croissante d'idéaux principaux de A est stationnaire ;
   - (ii) tout élément irréductible de A est premier dans A.
2. Munir l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$ d'une structure d'anneau naturelle ; montrer que l'anneau ainsi obtenu est factoriel mais pas noethérien.

Exercice 5.

1. Décomposer le polynôme X^4+1 en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que X^4+1 est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 6. Soit A un anneau intègre ; pour tout polynôme non nul P dans $A[X]$, on appelle *valuation* de P et on note $\mathrm{val}(P)$ le plus petit entier pour lequel le coefficient de P est non nul (par convention, la valuation du polynôme nul est $+\infty$).

1. Soit P dans $A[X]$; montrer que $\mathrm{val}(P)$ est le plus grand entier n tel que X^n divise P.
2. Soient P et Q dans $A[X]$; montrer qu'on a : $\mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.

Exercice 7.

1. Soient A un anneau factoriel et K son corps des fractions. Soit P dans $A[X]$, non constant, vérifiant le *critère d'Eisenstein* : il existe un idéal premier I de A tel que
   - (i) I contient tous les coefficients de P sauf son coefficient dominant ;
   - (ii) I^2 ne contient pas le coefficient constant de P.

   Le but de cette question est de montrer que P est irréductible dans $K[X]$; on suppose par l'absurde que P est réductible dans $K[X]$.
   - (a) Montrer que P s'écrit dans $A[X]$ comme produit de deux polynômes non constants P_1 et P_2.

   (b) En considérant la valuation dans $(A/I)[X]$, montrer que P_1 et P_2 vérifient la première condition du critère d'Eisenstein. Conclure.

2. Donner un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ vérifiant le critère d'Eisenstein mais réductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
3. Soient p un nombre premier et P le polynôme $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si $P(X+1)$ l'est ; en déduire que P est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 8. Le but de cet exercice est de déterminer la forme des idéaux premiers puis maximaux de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$.

1. Soit I un idéal premier strict de $\mathbb{Z}[X]$.
   (a) Montrer que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$, différent de $\mathbb{Z}$.
   (b) On suppose que $I \cap \mathbb{Z}$ est l'idéal nul.
      i. On note $\tilde{I}$ l'idéal engendré par I dans $\mathbb{Q}[X]$; montrer que l'intersection $\tilde{I} \cap \mathbb{Z}[X]$ est égale à I.
      ii. Montrer que I est principal, engendré par un polynôme non constant, irréductible et primitif.
   (c) On suppose que $I \cap \mathbb{Z}$ est engendré par un nombre premier p.
      i. Soit φ l'application « réduction modulo p » de $\mathbb{Z}[X]$ dans $\mathbb{F}_p[X]$; montrer que $\varphi(I)$ est un idéal premier de $\mathbb{F}_p[X]$.
      ii. Montrer que I est engendré soit par p, soit par p et un polynôme unitaire dont la réduction modulo p est irréductible.
2. Parmi les idéaux premiers ci-dessus, lesquels sont maximaux ?

Exercice 9. En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que tout idéal premier strict de $\mathbb{C}[X,Y]$ est soit principal, soit de la forme $(X-x, Y-y)$ avec x et y dans $\mathbb{C}$ et que les idéaux maximaux sont ceux de la seconde forme.

Exercice 10. Soit A un anneau factoriel. On suppose que dans A tout pgcd est donné par une relation de Bézout, c'est-à-dire que pour tous a et b dans A, il existe u et v dans A vérifiant $\mathrm{pgcd}(a,b) = au + bv$. Le but de cet exercice est de montrer qu'un tel anneau A est principal

1. Montrer que tout élément non nul n'a, à association près, qu'un nombre fini de diviseurs.
2. Soient I un idéal non nul de l'anneau A et a un élément non nul de I ; montrer que l'ensemble des chaînes finies strictement croissantes d'idéaux principaux de la forme $aA \subset a_1A \subset a_2A \subset \cdots \subset a_nA \subset I$ est fini.
3. Soit $aA \subset a_1A \subset a_2A \subset \cdots \subset a_NA \subset I$ une telle chaîne de longueur maximale ; montrer que l'idéal I est engendré par a_N.