ÉNS Lyon — Algèbre 1

L3 — 2010–2011

TD 12

Dans tout ce qui suit, A est un anneau commutatif intègre.

Exercice 1.

1. Soient L/K une extension finie de corps et x un élément de L ; montrer que le polynôme caractéristique de la multiplication par x, vue comme endomorphisme K-linéaire de L, est un polynôme unitaire à coefficients dans K qui annule x.
2. Trouver un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$ qui annule $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Exercice 2. À l'aide d'opérations élémentaires, mettre les matrices suivantes sous forme normale.

1. Pour $A = \mathbb{Z}$: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Pour $A = \mathbb{Q}[X]$: $\begin{pmatrix} X+4 & 2 \\ 2X-4 & X+1 \end{pmatrix}$.
3. Pour $A = \mathbb{Z}[i]$: $\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

1. Donner un exemple :
   - d'une famille libre à n éléments de A^n qui n'est pas une base ;
   - d'une famille génératrice minimale qui n'est pas une base ;
   - d'un module libre ayant un sous-module qui n'est pas libre. (*Indication :* on pourra démontrer que, vu comme sous-A-module, un idéal I d'un anneau A n'est libre que s'il est principal.)
2. Si N est un sous-module de M, un *supplémentaire* de N est un autre sous-module S de M tel que $M = N \oplus S$. Montrer que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ admet un unique sous-$\mathbb{Z}$-module isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ce dernier admet-il un supplémentaire ?

Exercice 4. Soit S un ensemble. On note A^S l'ensemble des applications de S dans A, et $A^{(S)}$ le sous-ensemble des applications $u \in A^S$ telles que l'ensemble $\{x \in S \mid u(x) \neq 0\}$ est fini.

1. Vérifier que A^S et $A^{(S)}$ sont des A-modules.
2. On définit, pour $x \in S$, la fonction $e_x : S \to A$ qui vaut 1 en x et 0 partout ailleurs. Montrer que $(e_x)_{x\in S}$ est une base de $A^{(S)}$.
3. Soit M un A-module. Montrer que toute application $f : S \to M$ se prolonge de façon unique en un morphisme de A-modules $A^{(S)} \to M$, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de A-modules $g : A^{(S)} \to M$ tel que $f = g \circ i$, où $i : S \to A^{(S)}$ est l'injection donnée par $i(x) = e_x$.

4. En déduire que tout A-module est isomorphe au quotient d'un A-module libre.

Exercice 5. Soit M un A-module. On appelle annulateur de M l'ensemble

$$\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A \,:\, aM = 0\}.$$

1. Vérifier que l'annulateur de M est un idéal de A.
2. Déterminer l'annulateur du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, pour $m \in \mathbb{N}$.
3. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A inclus dans $\mathrm{Ann}(A)$, montrer que M peut être muni d'une structure de $A/\mathfrak{a}$-module pour la loi $(a \bmod \mathfrak{a}, m) \mapsto am$.
4. Soit M un A-module tel que $\mathrm{Ann}(M) = \mathfrak{a} \neq \{0\}$. Montrer que M est un $A/\mathfrak{a}$-module dont l'annulateur est nul.
5. On suppose que l'anneau A est principal et M de type fini. Décrire $\mathrm{Ann}(M)$ en fonction du rang et des facteurs invariants de M.
6. Soit G un groupe abélien fini vu comme $\mathbb{Z}$-module. On note d l'entier positif tel que $\mathrm{Ann}(G) = d\mathbb{Z}$. Montrer que G est cyclique si et seulement si $d = \mathrm{Card}(G)$. En déduire le résultat suivant : tout sous-groupe fini du groupe des inversibles d'un corps est cyclique.

Exercice 6. Soit K un corps, soient P et Q deux polynômes unitaires tels qu'il existe un isomorphisme de $K[X]$-modules :

$$K[X]/(P) \simeq K[X]/(Q).$$

1. Montrer l'égalité $P = Q$. (*Indication :* on pourra utiliser la définition de l'annulateur, donnée dans l'exercice 5.)
2. A-t-on nécessairement cette égalité si l'isomorphisme est un isomorphisme d'anneaux ? Ou de K-espaces vectoriels ?

Exercice 7. On suppose que tout A-module est libre. Montrer que l'anneau A est un corps. (*Indication :* sous les hypothèses, montrer que l'annulateur de tout A-module non nul est nul.)

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^r$ un morphisme injectif de $\mathbb{Z}$-modules. Montrer que l'image de f est un sous-groupe d'indice $|\det(f)|$ de $\mathbb{Z}^r$.

Exercice 9. Quel est le rang des idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ vus comme $\mathbb{Z}$-modules ? Et vus comme $\mathbb{Z}[i]$-modules ?

Exercice 10. Déterminer les facteurs invariants et les diviseurs élémentaires des groupes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Exercice 11. À isomorphisme près, déterminer les groupes abéliens d'ordre 12, d'ordre 51, d'ordre 36 et d'ordre 360.

Exercice 12.

1. Le groupe abélien $(\mathbb{Q}, +)$ est-il un $\mathbb{Z}$-module libre ? Avec ou sans torsion ? De type fini ?
2. Montrer que le groupe $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ est un groupe de torsion qui possède un unique sous-groupe d'ordre n pout tout $n \geq 1$, et que ce sous-groupe est cyclique.