Révisions

Exercice 1. Déterminer tous les morphismes d'anneaux de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et tous les morphismes d'anneaux de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ continus (pour la topologie usuelle).

Dans les trois exercices qui suivent, sauf mention explicite du contraire, les anneaux seront supposés commutatifs et intègres.

Exercice 2. Soit A un anneau et M un A-module.
On note
$$\mathrm{M}_{\mathrm{tor}} = \left\{ x \in \mathrm{M} \,\middle|\, \exists a \in \mathrm{A} \setminus \{0\} : a \cdot x = 0 \right\}.$$
M est dit *de torsion* si $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{\mathrm{tor}}$ et *sans torsion* si $\mathrm{M}_{\mathrm{tor}} = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{M}_{\mathrm{tor}}$ est un sous-module de M.
2. Montrer que $\mathrm{M}/\mathrm{M}_{\mathrm{tor}}$ est sans torsion.
3. Soit $\mathrm{M}' \subset \mathrm{M}$ un sous-module. On suppose que M' et M/M' sont de torsion. Montrer qu'alors M est de torsion.
4. Montrer que si A n'est pas intègre, alors $\mathrm{M}_{\mathrm{tor}}$ n'est pas forcément un sous-module de M. (On pourra regarder par exemple $\mathrm{A} = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$).

Exercice 3. Soit A un anneau et M un A-module libre de rang fini $r \geq 1$. Soit $(m_1, \ldots, m_r)$ une base de M et $(m'_1, \ldots, m'_r)$ une famille quelconque d'éléments de M.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ tel que $f(m_i) = m'_i$, pour tout $1 \leq i \leq r$.
2. Montrer que f est un automorphisme de M si et seulement si $(m'_1, \ldots, m'_r)$ est une base de M.
3. Montrer que pour tout morphisme $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$, $\mathrm{M}/f(\mathrm{M})$ est annulé par $\mathrm{dét}(f)$.

Exercice 4. Soit M un A-module. On appelle *annulateur* de M le sous-ensemble de A
$$\mathrm{Ann}(\mathrm{M}) = \{a \in \mathrm{A} : a\mathrm{M} = 0\}.$$

1. Montrer que Ann(M) est un idéal de A.
2. On suppose que A est principal et M de type fini. Déterminer Ann(M) en fonction du rang et des facteurs invariants de M.
3. Soit G un groupe abélien fini vu comme $\mathbf{Z}$-module, et d l'entier positif tel que $\mathrm{Ann}(\mathrm{G}) = (d)$. Montrer que G est cyclique si et seulement si d est égal au cardinal de G.
4. En déduire que tout sous-groupe fini du groupe des inversibles d'un corps est cyclique.

Exercice 5.

1. Soit S un sous-ensemble de $\mathbf{C}$. Montrer que l'intersection A(S) des sous-anneaux $\mathrm{A} \subset \mathbf{C}$ contenant S est elle-même un anneau ; on l'appelle *le sous-anneau de* $\mathbf{C}$ *engendré par* S.
2. Soit $\mathrm{S} = \{s_1, \ldots, s_n\} \subset \mathbf{C}$. Montrer que l'anneau A(S) est le quotient d'un anneau de polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}$. On le note $\mathbf{Z}[s_1, \ldots, s_n]$, par abus de notation.

Exercice 6. On note $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ et on appelle *ensemble des entiers algébriques* l'ensemble des éléments $x \in \mathbf{C}$ tels qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathbf{Z}[\mathrm{X}] \setminus \{0\}$ unitaire avec $\mathrm{P}(x) = 0$.

1. Montrer par récurrence sur r que si $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$, alors $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_r]$ est un $\mathbf{Z}$-module de type fini.
2. Soit $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathbf{C}$. On suppose que $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_r]$ est un $\mathbf{Z}$-module de type fini. Montrer que $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_r] \subset \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$.
3. En déduire que $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ est un sous-anneau de $\mathbf{C}$ en montrant que si $x, x' \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$, alors $x + x' \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ et $xx' \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$.
4. Montrer que si $\tau \in \mathbf{C}$ et s'il existe un polynôme unitaire $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}[\mathrm{X}]$ avec $\mathrm{P}(\tau) = 0$, alors $\tau \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$. On dit que $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ est *intégralement clos.*

Exercice 7.

1. Donner une construction possible du corps à 16 éléments.
2. Montrer que $\mathbf{F}_{16}^{\times}$ est formé par les puissances successives d'un élément ω vérifiant $\omega^4 + \omega^3 + 1 = 0$.
3. Démontrer que $\omega, \omega^2, \omega^4, \omega^8$ sont les racines de $\mathrm{X}^4 + \mathrm{X}^3 + 1$ dans $\mathbf{F}_{16}$.
4. Démontrer que la famille $(\omega, \omega^2, \omega^4, \omega^8)$ est une base de $\mathbf{F}_{16}$ sur $\mathbf{F}_2$.

Exercice 8. (Cayley-Hamilton pour les modules de type fini)
Soit M un A-module de type fini engendré par n éléments, et soit I un idéal de A. Montrer que si $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ est un morphisme de A-modules tel que $f(\mathrm{M}) \subset \mathrm{IM}$, alors il existe des éléments $a_k \in \mathrm{I}^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n-1)$ tels que

$$f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_1 f + a_0 \,\mathrm{id}_{\mathrm{M}} = 0$$

en tant qu'endomorphismes de M.

Exercice 9. (Lemme de Nakayama)
Soit M un A-module de type fini, et soit I un idéal de A. Montrer que si $\mathrm{M} = \mathrm{IM}$, alors il existe un élément $a \in \mathrm{A}$ tel que $a\mathrm{M} = 0$ et $a \equiv 1 \mod \mathrm{I}$. Si, de plus, $\mathrm{I} \subset \mathrm{rad(A)}$ (où rad(A) est l'intersection de tous les idéaux maximaux de A), alors $\mathrm{M} = 0$.

Exercice 10. Soit M un A-module de type fini, et soit $\mathrm{T} : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ un morphisme de A-modules. Montrer que si T est surjectif, alors il est injectif. On pourra pour cela utiliser T pour munir M d'une structure de A[X]-module.