Polynômes symétriques et fractions rationnelles

Exercice 1.
Écrire en fonction des polynômes symétriques élémentaires les polynômes suivants.

1. $P = X^3Y + XY^3 + X^3Z + XZ^3 + Y^3Z + YZ^3$;
2. $Q = X^2Y^2Z + XY^2Z^2 + X^2YZ^2 - X^2Y^2 - Y^2Z^2 - X^2Z^2 - 2X^2YZ - 2XY^2Z - 2XYZ^2$.

Exercice 2. (Polynômes antisymétriques)
Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$ et $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) Pour tous $i < j$, P change de signe lorsqu'on échange X_i et X_j.
   ii) $P^\sigma = \epsilon(\sigma)P$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

   On dit alors que le polynôme P est antisymétrique.
2. Montrer que $\Delta := \prod_{i<j}(X_i - X_j)$ est antisymétrique.
3. Montrer que tout polynôme antisymétrique est le produit de Δ et d'un polynôme symétrique.

Exercice 3. (Polynômes invariants sous $\mathfrak{A}_n$)
Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$ et $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $\forall \sigma \in \mathfrak{A}_n, P^\sigma = P$.

1. Montrer que l'application $P \mapsto P^\sigma$ ne prend que deux valeurs lorsque σ parcourt $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer qu'il existe des polynômes symétriques A et B uniquement déterminés tels que $P = A + \Delta B$.
3. Décrire, comme quotient d'un anneau de polynômes, le sous-anneau de $K[X_1, \ldots, X_n]$ formé des polynômes invariants sous $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 4. (Automorphismes de $K(X)$)

1. Soit $f \in K(X)$ non constante. On note φ_f l'application de $K(X)$ dans $K(X)$, $u \mapsto u \circ f$. Montrer que φ_f est un morphisme de corps de $K(X)$ dans lui-même. Vérifier que $\varphi_{f \circ g} = \varphi_g \circ \varphi_f$.
2. Soit φ un morphisme du corps $K(X)$ dans lui-même, tel que φ induit l'identité sur K. On note $f = \varphi(X)$. Montrer que $\varphi = \varphi_f$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(K)$, on note $f_A \in K(X)$ la fraction rationnelle $\frac{aX+b}{cX+d}$. Montrer que $f_{AB} = f_A \circ f_B$.
4. Montrer que l'application $u : GL_2(K) \to \mathrm{Aut}_K(K(X))$, $A \mapsto \varphi_{f_A}$ est bien définie et est un anti-morphisme de groupes (c'est-à-dire que $u(AB) = \varphi_{f_B} \circ \varphi_{f_A}$).
5. Montrer que le noyau de u est formé des homothéties.
6. Montrer que toute fraction rationnelle définit une fonction de $\mathbf{P}^1(K) := K \cup \{\infty\}$ dans lui-même (si $f = P/Q$, avec P et Q premiers entre eux, on convient que $f(x) = \infty$ si x est une racine de Q, et $f(\infty) = \infty$ si $\deg P > \deg Q$, 0 si $\deg P < \deg Q$, et le quotient des coefficients dominants de P et Q si $\deg P = \deg Q$), et que la composition des fractions rationnelles correspond à la composition des fonctions.

7. Montrer que si L un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, la fonction f définie par une fraction rationnelle g/h (g, $h \in \mathrm{L}[\mathrm{X}]$ premiers entre eux) est injective si et seulement si $\max(\deg g, \deg h) = 1$.
8. En déduire que si K est de caractéristique nulle, $u : \mathrm{GL}_2(\mathrm{K}) \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{K}}(\mathrm{K}(\mathrm{X}))$ est surjective, et donc que $\mathrm{Aut}_{\mathrm{K}}(\mathrm{K}(\mathrm{X})) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathrm{K})$.

Exercice 5. (Théorème de Mason)

1. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois polynômes de $\mathbf{C}[\mathrm{X}]$, non constants, premiers entre eux dans leur ensemble tels que $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{C}$, et soit m le nombre de racines distinctes de ABC. Montrer que $\mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}} - \frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}}\right) = \mathrm{B}\left(\frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}} - \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{B}}\right)$. En déduire que $\max(\deg \mathrm{A}, \deg \mathrm{B}, \deg \mathrm{C}) < m$.
2. Soit $n \geq 3$. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ dans $\mathbf{C}[\mathrm{X}]$, l'un des trois au moins étant non constant, tels que $\mathrm{P}^n + \mathrm{Q}^n = \mathrm{R}^n$ sans que $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ soient tous égaux (à une constante près) à un même polynôme.
3. En déduire qu'il n'existe pas d'isomorphisme entre $\mathrm{Frac}(\mathbf{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]/(\mathrm{X}^n + \mathrm{Y}^n - 1))$ et $\mathbf{C}(\mathrm{T})$.

Exercice 6. (Sommes de Newton)
Soit n dans $\mathbf{N}^*$; pour tout entier k dans $\mathbf{N}^*$ on définit la k-ième somme de Newton :

$$p_k(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n) = \mathrm{X}_1^k + \cdots + \mathrm{X}_n^k \in \mathbf{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n].$$

Le but de l'exercice est de démontrer les formules de Newton :

$$p_d + \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^i \Sigma_i p_{d-i} + (-1)^d d \Sigma_d = 0.$$

Fixons $d > 0$. Pour $2 \leq i \leq d$, on pose

$$r_i = \sum_{\substack{j_1 < \ldots < j_{d-i} \\ j_0 \notin \{j_1, \ldots, j_{d-i}\}}} \mathrm{X}_{j_0}^i \cdot \mathrm{X}_{j_1} \cdots \mathrm{X}_{j_{d-i}}.$$

1. Écrire explicitement, dans le cas $n = d = 3$, les polynômes r_2 et r_3.
2. Écrire p_d en fonction des r_i.
3. Pour $2 \leq k \leq d-1$, écrire $p_k \Sigma_{d-k}$ en fonction des r_i.
4. Écrire $p_1 \Sigma_{d-1}$ en fonction des r_i et de Σ_d.
5. En déduire les formules de Newton.
6. Soit K un corps de caractéristique nulle. Montrer que, dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$, tout polynôme symétrique s'écrit de manière unique comme un polynôme en les n premières sommes de Newton.
7. Calculer à l'aide des formules de Newton la somme des puissances 4-ièmes des racines de $(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3)(\mathrm{X}-4)$.