Racines des polynômes

Exercice 1. (Échauffement)

1. Existe-t-il des entiers $m, n, k \in \mathbf{Z}$ tel que $m+n+k = 288$, $mn+nk+km = 540$, et $mnk = 960$?
2. Soit K un corps quelconque. Construire une extension de corps de K contenant un élément transcendant sur K.
3. Soit $\zeta_n \in \mathbf{C}$ une racine n-ieme primitive de l'unité. Calculer $1+\zeta_n^2+\cdots+\zeta_n^{2(n-1)}$.
4. Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers. Montrer que toute racine de P dans $\mathbf{Q}$ est entière et divise le coefficient constant de P. Qu'en est-il si P n'est plus supposé unitaire ?

Exercice 2. (Décomposition en éléments simples et Bézout)
Soit K un corps, $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{C} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ avec $\mathrm{pgcd}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) = 1$ et $\deg(\mathrm{C}) < \deg(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2)$.

1. Montrer qu'il existe dans K[X] des polynômes R_1 et R_2 vérifiant :
   (a) $\deg \mathrm{R}_k < \deg \mathrm{P}_k$;
   (b) $\mathrm{C} = \mathrm{P}_1\mathrm{R}_2 + \mathrm{P}_2\mathrm{R}_1$.
2. Faire le lien avec la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{PQ}}$.

Exercice 3. (Multiplicité et dérivées)
Soit K un corps, $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$, $\alpha \in \mathrm{K}$, et $m \in \mathbf{N}^*$.

1. On suppose que α est racine de P de multiplicité au moins m ; montrer que les dérivées de P jusqu'à l'ordre $m-1$ sont annulées par α.
2. Supposons que K est de caractéristique 0 ou que m est inférieur ou égal à la caractéristique de K. Montrer que si $\mathrm{P}^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout $0 \le k < m$, alors la multiplicité de α est au moins m. Donner un contre-exemple lorsque l'hypothèse sur la caractéristique n'est pas vérifiée.
3. Soit $\overline{\mathrm{K}}$ une clôture algébrique d'un corps K. Un polynôme à coefficients dans K est dit *séparable* si toutes ses racines dans $\overline{\mathrm{K}}$ sont simples. Montrer que P est séparable si et seulement si P et P′ sont premiers entre eux dans K[X].
4. Déduire de ce qui précède que K est un corps dont la caractéristique ne divise pas n, alors $\mathrm{X}^n - 1$ est séparable et que si K est un corps de caractéristique $p > 0$, alors tout polynôme de la forme $\mathrm{X}^p - \mathrm{X} - a \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ est séparable.

Exercice 4. (Polynômes séparables)
Soit K un corps, et $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$.

1. Montrer que si K est de caractéristique nulle, $\mathrm{P}' = 0$ si et seulement si P est constant.
2. Montrer que si K est de caractéristique p, alors $\mathrm{P}' = 0$ si et seulement si il existe $\mathrm{Q} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}(\mathrm{X}^p)$.
3. Un corps est dit *parfait* s'il est de caractéristique nulle ou s'il est de caractéristique p et que le morphisme $x \mapsto x^p$ est surjectif. Montrer que les corps finis sont parfaits.

4. Montrer que si K est parfait, alors tout polynôme irréductible de K[X] est séparable.
5. Soit $\mathrm{K} = \mathbf{F}_p(\mathrm{T})$. Montrer que le polynôme $\mathrm{X}^p - \mathrm{T} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ est irréductible mais qu'il n'est pas séparable.

Exercice 5. (Dix-septième problème de Hilbert)
Soit $\mathrm{P} \in \mathbf{R}[\mathrm{X}]$. On suppose que la fonction polynomiale définie par P sur $\mathbf{R}$ a toutes ses valeurs positives. Montrer que P est somme de deux carrés dans $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$.

Exercice 6. (Un critère d'homogénéité)
Soit K un corps de cardinal infini, n un entier supérieur ou égal à 1, P un polynôme en n variables à coefficients dans K et d un entier positif ; montrer que P est homogène de degré d si et seulement s'il vérifie, pour tout λ dans K et tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ dans K^n :

$$\mathrm{P}(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d \mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n).$$

Indication : on pourra utiliser que pour tout entier k non nul, il existe un élément dans K *qui n'est pas racine k-ième de l'unité.*

Exercice 7.
Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et $\mathrm{P} \neq 0$ un polynôme en n variables à coefficients dans $\mathbf{R}$, non nul ; montrer que l'ensemble

$$\mathrm{D}(\mathrm{P}) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \right\}$$

est un ouvert dense de $\mathbf{R}^n$. Qu'en est-il si on remplace $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$?