Résultant, critères d'irréductibilité

Exercice 1. (Intersection de deux coniques)

1. Soit K un corps et P, Q deux polynômes de $\mathrm{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$. On suppose P et Q unitaires en tant que polynômes en X et on pose $\mathrm{R} = \mathrm{Rés}^{\mathrm{X}}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{K}[\mathrm{Y}]$. Montrer que $\mathrm{R}(y) = 0$ si et seulement s'il existe $x \in \overline{\mathrm{K}}$ tel que $\mathrm{P}(x,y) = \mathrm{Q}(x,y) = 0$.
2. Déterminer l'intersection des coniques affines réelles C et C′ dans les cas suivants :
   (a) $\mathrm{C} : x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ et $\mathrm{C}' : 2x^2 + y^2 - y - 2 = 0$;
   (b) $\mathrm{C} : 2x^2 + y^2 + 3xy - 2x - y = 0$ et $\mathrm{C}' : 3x^2 + 2y^2 + 6xy = 0$.
3. Calculer le résultant par rapport à la variable X des polynômes XY et XY − 1. Commenter.

Exercice 2. (Résultant et courbes paramétrées)
Déterminer dans les cas suivants une équation polynomiale vérifiée par tous les points de la forme $(\mathrm{F}(t),\mathrm{G}(t))$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$:

1. $\mathrm{F}(t) = t^2 + t + 1$, $\mathrm{G}(t) = (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$;
2. $\mathrm{F}(t) = (t + t^3)/(1 + t^4)$, $\mathrm{G}(t) = (t - t^3)/(1 + t^4)$.

Exercice 3.
Soit K un corps infini. Si $h \in \mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n] \setminus \{0\}$, on pose

$$\mathrm{D}(h) = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{K}^n \,\middle|\, h(x_1,\ldots,x_n) \neq 0\right\}.$$

Montrer que si f, g et $h \neq 0$ sont trois éléments de $\mathrm{K}[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$ tels que les fonctions polynomiales associées à f et g coïncident sur $\mathrm{D}(h)$, alors $f = g$.

Exercice 4. (Fonctions polynomiales sur $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ invariantes par similitude)
Soit K un corps infini et $\mathrm{A} = \mathrm{K}[\mathrm{X}_{1,1},\ldots,\mathrm{X}_{1,n};\ldots;\mathrm{X}_{n,1},\ldots,\mathrm{X}_{n,n}]$, que l'on identifie aux fonctions polynomiales sur le K-espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. La groupe $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ agit sur cet anneau par $(\mathrm{P},f) \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})\times\mathrm{A} \mapsto f^{\mathrm{P}}$, où f^{P} est la fonction polynomiale définie par $f^{\mathrm{P}}(\mathrm{M}) = f(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP})$. Le but de l'exercice est d'étudier

$$\mathrm{B} = \mathrm{K}[\mathrm{M}_n(\mathrm{K})]^{\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})} = \left\{f \in \mathrm{A} \,\middle|\, \forall \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}), f^{\mathrm{P}} = f\right\},$$

dans le cas où K est un corps algébriquement clos.

1. Montrer que B est une K-sous-algèbre de A.
2. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice $(\mathrm{X}_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ s'écrit
   $$\chi(\mathrm{T}) = \mathrm{T}^n - \varphi_1\mathrm{T}^{n-1} + \varphi_2\mathrm{T}^{n-2} + \cdots + (-1)^n\varphi_n, \text{ où } \forall p \in [\![1,n]\!], \varphi_p \in \mathrm{B}.$$
   Identifier φ_1 et φ_n.
3. Soit $\mathrm{D}_n(\mathrm{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales. Montrer qu'en restriction à $\mathrm{D}_n(\mathrm{K})$ tout polynôme $f \in \mathrm{B}$ s'écrit comme un polynôme en $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$.

4. On suppose K algébriquement clos. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que tout polynôme $f \in \mathrm{B}$ s'écrit comme un polynôme en $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.
5. Montrer que le morphisme
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}[\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n] & \to & \mathrm{K}[\mathrm{M}_n(\mathrm{K})]^{\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})} \\ \mathrm{Y}_i & \mapsto & \varphi_i \end{array}$$
est un isomorphisme.

Exercice 5. (Les nombres algébriques forment un corps)
Soient P, Q deux polynômes unitaires à coefficients dans un corps K, et α_1, α_2 deux éléments de $\overline{\mathrm{K}}$ vérifiant $\mathrm{P}(\alpha_1) = \mathrm{Q}(\alpha_2) = 0$.

1. Soient $\widetilde{\mathrm{P}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$ et $\widetilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{Q}(\mathrm{Y} - \mathrm{X})$ dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$. On note R le résultant $\mathrm{Rés}_{\mathrm{X}}(\widetilde{\mathrm{P}}, \widetilde{\mathrm{Q}}) \in \mathrm{K}[\mathrm{Y}]$. Montrer que $\mathrm{R}(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$.
2. Donner de même un polynôme non nul à coefficients dans K annulant $\alpha_1\alpha_2$.

Exercice 6. (Signe du discriminant d'un polynôme réel)
Soient d un entier supérieur ou égal à 2 et P un polynôme à coefficients réels, unitaire de degré d ; on note $\mathrm{Disc}(\mathrm{P}) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} \Delta(\mathrm{P})$ et n le nombre de racines réelles de P.

1. Montrer que si les α_i sont les racines réelles de P, alors $\Delta(\mathrm{P})$ et $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}'(\alpha_i)$ ont le même signe.
2. Montrer que si $\mathrm{Disc}(\mathrm{P}) > 0$, alors $n \equiv d \pmod 4$, et que si $\mathrm{Disc}(\mathrm{P}) < 0$, alors $n \equiv d - 2 \pmod 4$.
3. Comment se traduisent ces résultats pour le polynôme $\mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q$?

Exercice 7.
Soient P, Q des polynômes de $\mathbf{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, tels que $\mathrm{pgcd}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 1$ dans l'anneau factoriel $\mathbf{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$.

1. Montrer que P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbf{C}(\mathrm{X})[\mathrm{Y}]$.
2. En déduire qu'il existe un polynôme $\mathrm{D} \in \mathbf{C}[\mathrm{X}]$ non nul, et des polynômes $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ tels que $\mathrm{D} = \mathrm{AP} + \mathrm{BQ}$.
3. Montrer que $\mathrm{V} = \left\{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \,\middle|\, \mathrm{P}(x, y) = \mathrm{Q}(x, y) = 0\right\}$ est fini.

Exercice 8. (Une version faible du théorème de Bézout)
Soient P,Q des polynômes de $\mathbf{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, de la forme
$$\mathrm{P} = \mathrm{Y}^p + \sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}_i(\mathrm{X})\mathrm{Y}^{p-i}, \ \deg \mathrm{P}_i \leq i \ ; \ \mathrm{Q} = \mathrm{Y}^q + \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Q}_j(\mathrm{X})\mathrm{Y}^{q-j}, \ \deg \mathrm{Q}_j \leq j.$$
Soit $\mathrm{V} = \left\{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \,\middle|\, \mathrm{P}(x, y) = \mathrm{Q}(x, y) = 0\right\}$ l'ensemble des zéros communs à P et Q.

1. Soit $\pi : (x, y) \mapsto x$ la première projection $\mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$, et R le résultant de P et Q vus comme polynômes en Y, de degrés respectifs p et q. Montrer que $\pi(\mathrm{V})$ est l'ensemble des racines de R.
2. Montrer que $\deg \mathrm{R} \leq pq$ (on pourra essayer de majorer le degré des coefficients de la matrice de Sylvester, dont le déterminant est le résultant) et en déduire $\mathrm{card}(\pi(\mathrm{V})) \leq pq$.

Exercice 9. (Critère d'Eisenstein)

1. Soit p un nombre premier et $\Phi_p(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{p-1} + \mathrm{X}^{p-2} + \cdots + \mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X}^p - 1)/(\mathrm{X} - 1)$ le p-ième polynôme cyclotomique. Montrer que Φ_p est irréductible dans $\mathbf{Z}[\mathrm{X}]$.
2. Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Montrer que $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2$ est irréductible dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}]$.