Extensions de corps II

Exercice 1. (Échauffement)

1. Soit K^a/K une clôture algébrique de K et L/K une sous-extension algébrique. Montrer que K^a/L est une clôture algébrique de L.
2. Montrer que si L/K est une extension finie et que $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, alors il existe pour tout $\beta \in L$ un polynôme $R \in K[X_1, \ldots, X_d]$ tel que $\beta = R(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$.
3. Montrer que si L/K est algébrique et si $f : L \to L$ est un morphisme K-linéaire, alors f est un automorphisme.
4. Montrer que si L/K est finie, alors le groupe Aut(L/K) des automorphismes K-linéaires de L est fini.

Exercice 2. (Extensions normales)
Soit K un corps. Une extension algébrique L/K est dite *normale* si elle vérifie la propriété suivante : tout $Q \in K[X]$ irréductible ayant une racine dans L est scindé dans L[X].

1. Montrer que toute extension L/K de degré 2 est normale. Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbf{Q}$ n'est pas normale. Décrire les morphismes de $\mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})$ dans $\mathbf{C}$. Montrer que l'on peut avoir M/K non normale même si M/L et L/K sont normales.
2. Soit $P \in K[X] \setminus \{0\}$ et L/K un corps de décomposition pour P sur K : on a $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ et $P = u\prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)$ sur L avec $u \in K^*$.
   (a) Soit $Q \in K[X]$ irréductible avec une racine $\beta \in L$. Expliquer pourquoi il existe un polynôme $R \in K[X_1, \ldots, X_d]$ tel que $\beta = R(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$. Montrer que
   $$S(X) = \prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \big(X - R(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)})\big) \in L[X]$$
   est en fait à coefficients dans K.
   (b) En déduire que Q est scindé dans L[X], et donc que L/K est normale.
3. Soit K^a/K une clôture algébrique de K et L/K une sous-extension normale. Montrer que tout morphisme K-linéaire $L \to K^a$ induit un automorphisme de L.

Exercice 3. (Extension d'Artin-Schreier) Soit K un corps de caracteristique $p > 0$ et $S_K = \left\{\alpha \in K \,\middle|\, \alpha = x^p - x \text{ avec } x \in K\right\}$.

1. Montrer que si $a \in S_K$, alors $X^p - X - a$ est scindé dans K[X].
2. Montrer que si $a \in K \setminus S_K$, alors $X^p - X - a$ est irréductible. Montrer que si L/K est un corps de rupture pour $X^p - X - a$ sur K, alors L/K est un corps de décomposition et donc normale. Montrer que l'on a un isomorphisme de groupes $\mathrm{Aut}(L/K) \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Remarque : On peut montrer que si L/K est de degré p et si Aut(L/K) est cyclique d'ordre p, alors L est un corps de décomposition pour un polynôme de la forme $X^p - X - a$.

Exercice 4. Soit K un corps de caracteristique $p > 0$ et $a \in K$ qui ne soit pas une puissance p-ième. Montrer que le polynôme $X^{p^m} - a$ est irréductible dans K[X] pour tout $m \in \mathbf{N}$.

Exercice 5. (Groupe des automorphismes d'une extension biquadratique) Soit p et q deux nombres premiers distincts.

1. Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})/\mathbf{Q}$ est normale.
2. Décrire le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})/\mathbf{Q})$ des automorphismes de $\mathbf{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$.

Exercice 6. (Automorphismes sauvages de C) On note $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ l'ensemble des automorphismes de corps $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. On a déjà montré que si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ est continu, alors f est l'identité ou la conjugaison complexe. Si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ n'est pas continu, on dit que f est *sauvage*.

1. Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ sauvage. Montrer que $f(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathbf{C}$.
2. Soit $\mathrm{K} \subset \mathbf{C}$ un sous-corps muni d'un automorphisme $f : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des couples (K', f') où K'/K une sous-extension de $\mathbf{C}/\mathrm{K}$ telle que f' prolonge f. Montrer que $\mathscr{F}$ est non vide.
3. On munit $\mathscr{F}$ de la relation $\prec$ définie par

$$(\mathrm{K}', f') \prec (\mathrm{K}'', f'') \text{ si } \mathrm{K}' \subset \mathrm{K}'' \text{ et } f'' \text{ prolonge } f'.$$

   Montrer que $\prec$ est un ordre pour lequel tout ensemble totalement ordonné admet un majorant. En déduire qu'il existe un élément maximal $(\widetilde{\mathrm{K}}, \widetilde{f})$ dans $\mathscr{F}$.
4. Supposons qu'il existe un élément $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \widetilde{\mathrm{K}}$. Montrer que si α est algébrique sur $\widetilde{\mathrm{K}}$, alors $\widetilde{f}$ se prolonge en un automorphisme de $\widetilde{\mathrm{K}}^a$. Montrer que si α est transcendant sur $\widetilde{\mathrm{K}}$ alors $\widetilde{f}$ se prolonge en un automorphisme de $\widetilde{\mathrm{K}}(\alpha)$ envoyant α sur lui-même. En déduire une contradiction.
5. En déduire que $\widetilde{\mathrm{K}} = \mathbf{C}$.
6. Donner un exemple de sous-corps $\mathrm{K} \subset \mathbf{C}$ et d'un automorphisme qui ne soit ni l'identité ni la conjugaison complexe.

Remarque : On peut montrer que le cardinal de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ est $2^{|\mathbf{R}|}$