Constructions à la règle et au compas

Dans toute cette feuille, *constructible* signifie *constructible à la règle et au compas.*

Exercice 1. (Duplication du cube)
Montrer que le nombre $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.

Exercice 2. (Trisection de l'angle)

1. Soit θ un nombre réel ; montrer que $2\cos(\theta/3)$ est racine de $\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} - 2\cos\theta$.
2. Montrer que l'angle $\pi/3$ n'est pas trisectable à la règle et au compas.

Exercice 3. (Un algébrique de degré 4 non constructible)
Soit P le polynôme $\mathrm{X}^4 + \mathrm{X} + 1$ et x une racine de P dans $\mathbf{C}$. Le but de cet exercice est de montrer que x n'est pas constructible.

1. Montrer que P est irréductible sur $\mathbf{Q}$.
2. On suppose par l'absurde que x est constructible. Montrer qu'il existe une extension finie de $\mathbf{Q}$, formée de nombres constructibles, sur laquelle P se factorise en produit de deux polynômes de degré 2.
3. Montrer que parmi les coefficients de ces deux polynômes se trouve une racine de
$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^6 - 4\mathrm{X}^2 - 1.$$
4. Montrer que dans $\mathbf{Q}[\mathrm{X}]$, Q possède un facteur (irréductible) de degré 2, puis un facteur de degré 2 de la forme $\mathrm{X}^2 + n$, pour un entier relatif n.
5. Conclure.

Exercice 4. (Polygones réguliers constructibles)
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note $\varphi(n)$ l'indicatrice d'Euler de n et $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$.

1. Soit n dans $\mathbf{N}^*$; montrer que si ζ_n est constructible, alors $\varphi(n)$ est une puissance de 2.

Le reste de l'exercice est consacré à la démonstration de la réciproque de cette assertion.

2. Déterminer les entiers supérieurs ou égaux à 1 dont l'indicatrice d'Euler est une puissance de 2.
3. Soient n et m dans $\mathbf{N}^*$ premiers entre eux ; montrer que ζ_n et ζ_m sont constructibles si et seulement si ζ_{nm} l'est.
4. Montrer que ζ_{2^k} est constructible pour tout k dans $\mathbf{N}^*$.
5. Soit p un nombre premier tel que $p-1$ soit une puissance de 2. [1]
   (a) Soit n dans $\mathbf{N}^*$ premier à p.
      i. Montrer qu'il existe un unique automorphisme du corps $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ qui envoie ζ_p sur ζ_p^n ; on le note σ_n.
      ii. Montrer que σ_n ne dépend que de la classe de n modulo p.

1. Un tel nombre premier est appelé *nombre premier de Fermat*. En guise de question subsidiaire, vous pouvez montrer qu'il est alors forcément de la forme $2^{2^m} + 1$.

iii. Montrer que l'ensemble des points fixes de σ_n dans $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ forme un sous-corps de $\mathbf{Q}(\zeta_p)$.

(b) Soit u dans $\mathbf{N}^*$ premier à p dont la classe modulo p engendre $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$; pour tout m dans $\mathbf{N}$, on note τ_m l'automorphisme $\sigma_{u^{2^m}}$ et K_m le sous-corps de $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ formé des points fixes de τ_m.

i. En choisissant une base de $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ sur $\mathbf{Q}$ adéquate, montrer que K_0 est égal à $\mathbf{Q}$.

ii. Montrer qu'on a pour tout m dans $\mathbf{N}$: $\tau_{m+1} = \tau_m \circ \tau_m$.

iii. Montrer que pour tout m dans $\mathbf{N}$, K_{m+1} est une extension de degré au plus 2 de K_m.

iv. Déduire de ce qui précède que ζ_p est constructible.

6. En déduire quels sont les entiers n tels que le polygône à n côtés soit constructible à la règle et au compas.

7. Décrire une construction explicite du pentagone régulier à la règle et au compas.