
Exponentielle de matrices

Exercice 1. (Échauffement)

1. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\deg P < n$ et $e^A = P(A)$.
2. Un seul polynôme P convient-il à toutes les matrices A ?

Exercice 2. Soit A une matrice dans $M_2(\mathbf{C})$. Soit a, b les valeurs propres de A .

1. Montrer que si $a \neq b$, alors

$$e^A = \frac{e^a - e^b}{a - b}A + \frac{ae^b - be^a}{a - b}I_2.$$

2. Trouver une formule dans le cas où $a = b$.

Exercice 3. (Sous-groupes arbitrairement petits)

Un *groupe topologique* est un espace topologique G muni d'une structure de groupe pour laquelle la multiplication $\mu : G \times G \rightarrow G$ et l'inversion $\text{inv} : G \rightarrow G$ sont continues. On dit qu'un groupe G *admet des sous-groupes arbitrairement petits* si tout voisinage de l'élément neutre de G contient un sous-groupe non trivial.

1. Donner un exemple de groupe topologique séparé admettant des sous-groupes arbitrairement petits.
2. Montrer que $GL_n(\mathbf{C})$ n'admet pas de sous-groupes arbitrairement petits.

Exercice 4. (Exponentielle et matrices symétriques)

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note $\text{Sym}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n , et $\text{SDP}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer que l'exponentielle induit une bijection continue entre $\text{Sym}_n(\mathbf{R})$ et $\text{SDP}_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme entre $\text{Sym}_n(\mathbf{R})$ et $\text{SDP}_n(\mathbf{R})$.
3. Énoncer et prouver un résultat analogue pour les matrices complexes hermitiennes.

Exercice 5. (Matrices nilpotentes et unipotentes)

Soit $k \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$. On dit qu'une matrice $M \in M_n(k)$ est *unipotente* si $M - I_n$ est nilpotente. On note $\text{Nil}_n(k)$ (resp. $\text{Uni}_n(k)$) l'ensemble des matrices nilpotentes (resp. unipotentes) de $M_n(k)$. Montrer que $\exp : \text{Nil}_n(k) \rightarrow \text{Uni}_n(k)$ est un homéomorphisme.

Exercice 6. (Surjectivité de l'exponentielle)

On rappelle la *forme canonique de Jordan* : toute matrice de $M_n(\mathbf{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs sont de la forme

$$J_r(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \in M_r(\mathbf{C}).$$

1. Montrer que si $a \neq 0$, $J_r(a)$ est dans l'image de $\exp : M_n(\mathbf{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{C})$.
2. Montrer que $\exp : M_n(\mathbf{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{C})$ est surjective, mais pas injective. En déduire que $X \mapsto X^2$ est surjective sur $\text{GL}_n(\mathbf{C})$.

Exercice 7. (Non-surjectivité de l'exponentielle)

1. Montrer que $J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas le carré d'une matrice de $M_2(\mathbf{R})$.
2. Montrer que $J_2(-1)$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice de $M_2(\mathbf{R})$.