Intégralité

Exercice 1. (Révisions)
Soit $\mathrm{P} \in \mathbf{Z}[\mathrm{X}]$ non constant.

1. Montrer que si P est irréductible dans $\mathbf{Z}[\mathrm{X}]$, alors P est irréductible dans $\mathbf{Q}[\mathrm{X}]$.
2. Donner un contre-exemple à la réciproque de la question précédente. Montrer que si $\mathrm{cont}(\mathrm{P}) = 1$ et que P est irréductible dans $\mathbf{Q}[\mathrm{X}]$, alors P est irréductible dans $\mathbf{Z}[\mathrm{X}]$.
3. Montrer que si P est unitaire et qu'il existe un nombre premier $p > 0$ avec $\overline{\mathrm{P}} \in \mathbf{F}_p[\mathrm{X}]$ irréductible, alors P est irréductible dans $\mathbf{Z}[\mathrm{X}]$.
4. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^4 + 1$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[\mathrm{X}]$, et que pour tout nombre premier $p > 0$, l'image de P dans $\mathbf{F}_p[\mathrm{X}]$ est réductible.

Exercice 2.

1. Soit K un corps. Montrer que si $\mathrm{G} \subset \mathrm{K}^\times$ est un sous-groupe fini, alors G est cyclique.
2. Montrer que si K est un corps fini, alors il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}] - \{0\}$ avec $\mathrm{P}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{K}$.
3. Si $\omega = e^{2\pi i/3}$, alors $[\mathbf{Q}(\omega) : \mathbf{Q}] = 2$. Trouver $d \in \mathbf{Z}$ sans facteur carré tel que $\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$.
4. Donner la factorisation de $\mathrm{X}^8 + \mathrm{X}^7 + \ldots + \mathrm{X} + 1$ en irréductibles de $\mathbf{Q}[\mathrm{X}]$.

Exercice 3.

1. Montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ n'est pas intégralement clos dans son corps de fractions.
2. Soit B un anneau intègre et $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ un sous-anneau, avec B entier sur A. Montrer que B est un corps si et seulement si A est un corps.
3. Soit B un anneau, $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ un sous-anneau avec B entier sur A, $\mathfrak{q} \subset \mathrm{B}$ un idéal premier, et $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathrm{A}$. Montrer que $\mathfrak{p}$ est un idéal de A et qu'il est maximal si et seulement si $\mathfrak{q}$ est un idéal maximal de B.

Exercice 4. (Polynôme minimal et intégralité)
Soit A un anneau intègre et $\mathrm{K} = \mathrm{Frac}(\mathrm{A})$ son corps de fractions. Soit L/K une extension algébrique. On note $\mathrm{A_K}$ (resp. $\mathrm{A_L}$) la clôture intégrale de A dans K (resp. L).
Soit $s \in \mathrm{L}$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ son polynôme minimal.

1. Montrer que $s \in \mathrm{L}$ est entier sur A si et seulement si P est à coefficients dans $\mathrm{A_K}$. En déduire que si A est intégralement clos dans K, alors s est entier sur A si et seulement si $\mathrm{P} \in \mathrm{A}[\mathrm{X}]$.
2. Supposons maintenant que A est intégralement clos. Montrer que si $f \in \mathrm{A}[\mathrm{X}]$ est unitaire, alors les facteurs irréductibles de f dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$ sont tous à coefficients dans A.

Exercice 5. Soit $\mathbf{F}_{16}$ le corps fini à 16 éléments.

1. Donner une construction de $\mathbf{F}_{16}$.
2. Montrer que $\mathbf{F}_{16}^\times$ est un groupe cyclique engendré par un élément ω vérifiant $\omega^4 + \omega^3 + 1$.

3. Démontrer que ω, ω^2, ω^4, et ω^8 sont les racines du polynôme $X^4 + X^3 + 1$ dans $\mathbf{F}_{16}$.
4. Démontrer que $(\omega, \omega^2, \omega^4, \omega^8)$ est une base de $\mathbf{F}_{16}$ sur $\mathbf{F}_2$.
5. Soit $a \in \mathbf{F}_{16}$. Résoudre dans $\mathbf{F}_{16}$ l'équation $x^5 = a$, en discutant éventuellement selon la valeur de a.

Exercice 6. Montrer que l'anneau $A = \mathbf{C}[X, Y]/(Y^2 - X^3)$ est intègre. Montrer que la clôture intégrale de A est isomorphe à $\mathbf{C}[T]$.

Exercice 7. (Groupe des automorphismes d'une extension biquadratique)
Soit p et q deux nombres premiers distincts.

1. Décrire $\mathbf{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})/\mathbf{Q}$ comme corps de décomposition d'un polynôme.
2. Décrire le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})/\mathbf{Q})$ des automorphismes de $\mathbf{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$.