Révisions

Dans toute la feuille, ζ_n désigne le nombre complexe $\exp(2i\pi/n)$.

Exercice 1. (Extensions de degré premier)
Soit L/K une extension dont le degré est un nombre premier. Montrer que les seuls corps compris entre K et L sont K et L eux-même. Montrer que tout élément $\alpha \in \mathrm{L} \setminus \mathrm{K}$ vérifie $\mathrm{L} = \mathrm{K}(\alpha)$.

Exercice 2. (Extensions algébriques)
Soit L/K une extension et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments de L. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes, où l'on note comme d'habitude $\mathrm{K}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ (resp. $\mathrm{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$) le plus petit sous-anneau (resp. sous-corps) de L contenant à la fois K et les éléments (α_i) :

(i) tous les α_i sont algébriques sur K ;
(ii) l'extension $\mathrm{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)/\mathrm{K}$ est algébrique ;
(iii) l'extension $\mathrm{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)/\mathrm{K}$ est finie ;
(iv) le K-espace vectoriel $\mathrm{K}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ est de dimension finie ;

Exercice 3.
Les extensions suivantes sont-elles normales ? séparables ? Donner leur degré et déterminer leurs automorphismes.

1. $\mathbf{Q}(\zeta_n)/\mathbf{Q}$;
2. $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbf{Q}$;
3. $\mathbf{F}_9/\mathbf{F}_3$;
4. $\mathrm{F}(\alpha)/\mathrm{F}$, où $\mathrm{F} = \mathbf{F}_3(t)$ et α est une racine de $\mathrm{X}^3 - t \in \mathrm{F}[\mathrm{X}]$ dans une clôture algébrique.

Exercice 4. (Extensions multiquadratiques)
Soit $(p_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une énumération des nombres premiers. Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $[\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}) : \mathbf{Q}] = 2^n$.
2. $x \in \mathbf{Q}$ est le carré d'un élément de $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ si et seulement s'il existe une partie $\mathrm{I} \subset \{1, \ldots, n\}$ telle que $x \prod_{i\in\mathrm{I}} p_i$ soit le carré d'un nombre rationnel.

En déduire que la famille $\left(\sqrt{p_i}\right)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre sur $\mathbf{Q}$.
Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1} + \cdots + \sqrt{p_n}) = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$. (On pourra utiliser la preuve du théorème de l'élément primitif).

Exercice 5.
Pour chacune des extensions suivantes, déterminer elle est séparable et normale, son degré, ses automorphismes et ses sous-extensions :

1. $\mathbf{Q}(\zeta_5)/\mathbf{Q}$;
2. $\mathbf{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})/\mathbf{Q}$;
3. $\mathbf{Q}(\zeta_3, \sqrt{2})/\mathbf{Q}$.

Exercice 6.
Soit F un corps de caractéristique p et L/F une extension dont le degré n'est pas un multiple de p. Montrer qu'elle est séparable.

Exercice 7.
Déterminer l'anneau des éléments entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, i)$. Même question pour $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Exercice 8.
Déterminer (à l'aide d'un ordinateur) les trois derniers chiffres de la partie entière $\left\lfloor \left(3+\sqrt{5}\right)^{10^{100}} \right\rfloor$.