Produits semi-directs, groupe linéaire

Exercice 1. (Produit semi-direct, préliminaires)

1. Soit G un groupe et $\mathrm{H}, \mathrm{N} \subset \mathrm{G}$ deux sous-groupes tels que $\mathrm{H} \cap \mathrm{N} = \{1_{\mathrm{G}}\}$, $\mathrm{G} = \langle \mathrm{H} \cup \mathrm{N} \rangle$, et N soit distingué dans G. Montrer alors que G est isomorphe à un produit semi-direct de N par H.
2. Que se passe-t-il si H est lui aussi distingué dans G ?
3. Soit $n \geq 3$. Démontrer que $\mathfrak{S}(n)$ est isomorphe à un produit semi-direct de $\mathfrak{A}(n)$ par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Est-il isomorphe à $\mathfrak{A}(n) \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$?
4. Montrer que $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ n'est pas isomorphe à un produit semi-direct non trivial.

Exercice 2. (Produit semi-direct, applications)

1. Soit $p < q$ des nombres premiers. Montrer qu'à isomorphisme près, il existe un ou deux groupes d'ordre pq, suivant que p divise $q - 1$ ou non.
2. Soit n un entier. Montrer que tous les groupes d'ordre n sont isomorphes si et seulement si n est le produit de nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$ tous distincts tels que p_i ne divise jamais $p_j - 1$.
3. Démontrer que la condition précédente est équivalente au fait que n et $\varphi(n)$ soient premiers entre eux.
4. Déterminer à isomorphisme près les groupes d'ordre 12.

Exercice 3. (Centre)
Soit A un anneau quelconque et $n \geq 1$. Déterminer le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{A})$.

Exercice 4.

1. Soit K un corps dans lequel tout polynôme de degré 2 a une racine et

$$\mathrm{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a, b, d \in \mathrm{K} \\ ad \neq 0 \end{matrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathrm{K}).$$

   Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathrm{K})$ est l'union des conjugués de B.
2. Démontrer que si G est un groupe fini et que H en est un sous-groupe strict, G n'est pas égal à l'union des conjugués de H.

Exercice 5.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ un élément d'ordre fini. Montrer que $\mathrm{A}^{12} = \mathrm{I}_2$.
2. Soit p un nombre premier et $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$. Montrer que l'ordre de A est inférieur ou égal à $2p$.

Exercice 6. (Anneaux de Hermite)
On dit qu'un anneau commutatif A est *de Hermite* si pour tout $n \geq 1$ et tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}$, il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{A})$ telle que

$$\mathrm{A} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'un anneau principal est de Hermite.
2. Donner un exemple d'anneau A qui ne soit pas de Hermite.
3. En déduire que si $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$, il existe une matrice carrée dont la première ligne soit $(a_1, \ldots, a_n)$ et dont le déterminant soit $\mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_n)$. (Théorème de Hermite, 1849).

Exercice 7. (Matrices élémentaires)
Soit R un anneau commutatif. On appelle *groupe des matrices élémentaires* $n \times n$ et on note $\mathrm{E}_n(\mathrm{R})$ le groupe engendré par les matrices de la forme $1 + xe_{ij}$ avec $i \neq j$ et $x \in \mathrm{R}$.

1. Soit K un corps. Que vaut $\mathrm{E}_n(\mathrm{K})$?
2. Dans la suite de l'exercice, $\mathrm{R} = \mathrm{K}[x, y]$. Si $f \in \mathrm{R}$ est non nul, on appelle *forme dominante* de f et on note $\mathrm{FD}(f)$ la somme de ses monômes de degré (total) maximal. On pose par convention $\mathrm{FD}(0) = 0$. Montrer que si $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}_2(\mathrm{A}) \setminus \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$, $\mathrm{dét}\, \mathrm{FD}(\mathrm{A}) = 0$.
3. Si $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{R})$, on note $\mathrm{FD}(\mathrm{A})$ la matrice $(\mathrm{FD}(a_{i,j}))_{i,j}$. Montrer que si M appartient à $\mathrm{E}_2(\mathrm{R}) \setminus \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$, alors l'une des conclusions suivantes advient :
   – l'un des coefficients de M est nul ;
   – l'une des lignes de FD(M) est un multiple (dans R) de l'autre.
4. En déduire que la *matrice de Cohn* $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 + xy & x^2 \\ -y^2 & 1 - xy \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{SL}_2(\mathrm{R}) \setminus \mathrm{E}_2(\mathrm{R})$.