Groupe linéaire, simplicité

Exercice 1. (Cardinal des groupes linéaires sur les corps finis)
Calculer les cardinaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q), \mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q), \mathrm{PGL}_n(\mathbf{F}_q)$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{F}_q)$.

Exercice 2.
Soit K un corps fini et n un entier supérieur ou égal à 3. Montrer que les sous-groupes distingués de $\mathrm{SL}_n(\mathrm{K})$ distincts de $\mathrm{SL}_n(\mathrm{K})$ sont cycliques.

Exercice 3. (Action sur la droite projective)
Soit K un corps. On note $\mathscr{D}(\mathrm{K})$ l'ensemble des droites vectorielles de K^2. En associant à $\lambda \in \mathrm{K}$ la droite $\mathrm{D}_\lambda = \mathrm{Vect}\binom{\lambda}{1}$ et à ∞ la droite $\mathrm{D}_\infty = \mathrm{Vect}\binom{1}{0}$, on obtient une bijection $\mathscr{D}(\mathrm{K}) \simeq \mathrm{K} \sqcup \{\infty\}$.

1. Montrer que l'action naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{K})$ sur K^2 induit une action de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{K})$ sur $\mathscr{D}(\mathrm{K})$. Montrer que le noyau de cette action est le sous-groupe des matrices scalaires et en déduire une action fidèle de $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{K})$ sur $\mathscr{D}(\mathrm{K})$.
2. En déduire que l'expression
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot x = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{cx+d} & \text{si } x \in \mathrm{K} \text{ et } cx+d \neq 0 \\ \dfrac{a}{c} & \text{si } x = \infty \text{ et } c \neq 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$
définit une action fidèle de $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{K})$ sur $\mathrm{K} \sqcup \{\infty\}$. Dans la suite, par abus de notation, on pourra identifier les éléments de $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{K})$ aux transformations correspondantes de $\mathrm{K} \sqcup \{\infty\}$, appelées *homographies.*
3. Montrer que l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{K})$ sur $\mathscr{D}(\mathrm{K})$ est *exactement* 3-*transitive*, c'est-à-dire qu'étant donné deux triplets (a, b, c) et (a', b', c') d'éléments distincts de $\mathscr{D}(\mathrm{K})$, il existe un unique élément $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathrm{K})$ tel que $g \cdot a = a'$, $g \cdot b = b'$ et $g \cdot c = c'$.
4. En déduire les isomorphismes suivants, dits *exceptionnels :*
$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2) = \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_2) \simeq \mathfrak{S}(3) \qquad \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_4) = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_4) \simeq \mathfrak{A}(5)$$
$$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_3) \simeq \mathfrak{S}(4) \qquad \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_3) \simeq \mathfrak{A}(4).$$
5. Dans la fin de l'exercice, on suppose K fini. Démontrer que tout élément de $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{K})$ fixant à la fois 0 et ∞ est de la forme $x \mapsto \lambda x$, pour un certain $\lambda \in \mathrm{K}^\times$. En déduire que les éléments $x \mapsto x+1$, $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto \lambda x$ engendrent $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{K})$.
6. En utilisant une méthode semblable, trouver un système de générateurs de $\mathrm{PSL}_2(\mathrm{K})$.

Exercice 4. ($\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$)
Soit n un entier.

1. Montrer que le cardinal de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est
$$n^3 \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$
où le produit porte sur l'ensemble des nombres premiers divisant n.

2. Montrer que l'on a une suite exacte

$$1 \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\text{dét}} (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times \to 1.$$

En fait, démontrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})\mathrm{G}_n$, où

$$\mathrm{G}_n = \left\{\mathrm{diag}(1,d) \,\middle|\, d \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times\right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}).$$

Exercice 5.
Pour quels entiers $n \geq 2$ la réduction $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est-elle surjective ?