Exponentielle de matrices

Exercice 1. (Échauffement)

1. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\deg P < n$ et $e^A = P(A)$.
2. Un seul polynôme P convient-il à toutes les matrices A ?

Exercice 2.
Soit A une matrice dans $M_2(\mathbf{C})$. Soit a,b les valeurs propres de A.

1. Montrer que si $a \neq b$, alors
$$e^A = \frac{e^a - e^b}{a-b}A + \frac{ae^b - be^a}{a-b}I_2.$$
2. Trouver une formule dans le cas où $a = b$.

Exercice 3. (Surjectivité de l'exponentielle)
On rappelle la *forme canonique de Jordan* : toute matrice de $M_n(\mathbf{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs sont de la forme
$$J_r(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \in M_r(\mathbf{C}).$$

1. Montrer que si $a \neq 0$, $J_r(a)$ est dans l'image de $\exp : M_n(\mathbf{C}) \to GL_n(\mathbf{C})$.
2. Montrer que $\exp : M_n(\mathbf{C}) \to GL_n(\mathbf{C})$ est surjective, mais pas injective. En déduire que $X \mapsto X^2$ est surjective sur $GL_n(\mathbf{C})$.

Exercice 4. (Non-surjectivité de l'exponentielle)

1. Montrer que $J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas le carré d'une matrice de $M_2(\mathbf{R})$.
2. Montrer que $J_2(-1)$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice de $M_2(\mathbf{R})$.

Exercice 5. (Exponentielle et matrices symétriques)
Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note $\mathrm{Sym}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n, et $\mathrm{SDP}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer que l'exponentielle induit une bijection continue entre $\mathrm{Sym}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{SDP}_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme entre $\mathrm{Sym}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{SDP}_n(\mathbf{R})$.
3. Énoncer et prouver un résultat analogue pour les matrices complexes hermitiennes.

Exercice 6. (Sous-groupes arbitrairement petits)
Un *groupe topologique* est un espace topologique G muni d'une structure de groupe pour laquelle la multiplication $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ et l'inversion $\mathrm{inv} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ sont continues. On dit qu'un groupe G *admet des sous-groupes arbitrairement petits* si tout voisinage de l'élément neutre de G contient un sous-groupe non trivial.

1. Donner un exemple de groupe topologique séparé admettant des sous-groupes arbitrairement petits.
2. Rappeler pourquoi $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ n'admet pas de sous-groupes arbitrairement petits.

Exercice 7. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

1. Déterminer la décomposition de Dunford de $\exp(\mathrm{A})$ en fonction de celle de A.
2. Déterminer les matrices $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $\exp(\mathrm{A}) = \mathrm{I}_n$.

Exercice 8. On note S^1 le sous-groupe $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbf{C}^\times$.

1. Déterminer les morphismes continus de S^1 dans S^1.
2. Déterminer les morphismes continus de S^1 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.