
Devoir à la maison : correction

Exercice 1.— Un exemple de sous-variété : les structures complexes

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Montrer que la donnée d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel sur E est équivalente à celle d'un endomorphisme $J \in \text{GL}(E)$ tel que $J^2 = -\text{id}$.

Étant donné un tel endomorphisme J , on peut définir une action de \mathbb{C} sur E de la manière suivante : $(a + bi) \cdot x = a + bJ(x)$. On a évidemment $z \cdot (z' \cdot x) = (zz') \cdot x$. Cette action est en outre linéaire, c'est-à-dire distributive sur l'addition, et étend l'action de \mathbb{R} sur E par multiplication scalaire.

Réciproquement, si E est muni d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel (étendant sa structure de \mathbb{R} -espace vectoriel), la multiplication par i est un endomorphisme J vérifiant $J^2 = -\text{id}$. On vient donc bien de définir deux applications (tautologiquement réciproques) entre l'espace des structures de \mathbb{C} -espaces vectoriels sur E et celui des endomorphismes J tels que $J^2 = -\text{id}$.

On pose $\mathcal{J}(E) = \left\{ J \in \text{GL}(E) \mid J^2 = -\text{id} \right\}$. Montrer que c'est une sous-variété de l'espace vectoriel $\text{End } E$ des endomorphismes de E et déterminer sa dimension.

Si $\dim E$ est impaire, $\mathcal{J}(E)$ est vide ; on suppose désormais qu'on est dans le cas contraire, et on note $2n$ la dimension (réelle) de E . La première question permet d'utiliser le fait que deux \mathbb{C} -espaces vectoriels de même dimension sont isomorphes. Traduit dans notre langage, cela donne qu'étant donné $J \in \mathcal{J}(E)$, il existe un isomorphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}^n$ tel que $\varphi \circ J \circ \varphi^{-1} = j$, où l'on note $j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ la structure complexe canonique, c'est-à-dire l'automorphisme \mathbb{R} -linéaire que définit la multiplication par i . En conséquence, si J_1 et J_2 sont deux structures complexes sur un même espace E , elles sont conjuguées par un automorphisme $\varphi \in \text{GL}(E)$. Comme il est par ailleurs clair que le conjugué d'une structure complexe est toujours une structure complexe, on a :

$$\mathcal{J}(E) = \left\{ \varphi \circ J_0 \circ \varphi^{-1} \mid \varphi \in \text{GL}(E) \right\}, \text{ où } J_0 \text{ est une structure complexe quelconque.}$$

$\mathcal{J}(E)$ est donc l'image de l'application :

$$F : \begin{array}{ccc} \text{GL}(E) & \rightarrow & \text{End}(E) \\ A & \mapsto & A \circ J_0 \circ A^{-1} \end{array},$$

dont nous allons montrer qu'elle est de rang constant. On calcule aisément la différentielle de cette fonction : $d_{\text{id}}F(H) = H \circ J_0 - J_0 \circ H$ et, en utilisant le fait que $F(A + H) = A \circ F(I + A^{-1} \circ H) \circ A^{-1}$, on obtient la formule générale $d_A F(H) = A \circ d_{\text{id}}F(A^{-1} \circ H) \circ A^{-1}$. Les applications $X \mapsto A \circ X \circ A^{-1}$ et $X \mapsto A^{-1} \circ X$ étant des automorphismes de $\text{End}(E)$ pour

A inversible, on obtient ainsi que pour tout $A \in GL(E)$, $\text{rg } d_A F = \text{rg } d_{\text{id}} F$. L'application F est donc bien de rang constant sur l'ouvert $GL(E)$.

Calculons son rang : il suffit de déterminer $\dim \left\{ H \in \text{End}(E) \mid H \circ J_0 = J_0 \circ H \right\}$, où J_0 est une structure complexe. C'est exactement l'espace des applications \mathbb{C} -linéaires de E (que J_0 munit d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel complexe de dimension n) : il est de dimension (réelle) $2n^2$.

D'après le théorème du rang constant, pour une structure complexe J_0 , il existe donc un ouvert U de $GL(E)$ contenant id , un ouvert V de $\text{End } E$ contenant J_0 et un ouvert W de $\mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}^{2n}$ contenant $(0, 0)$ ainsi que des difféomorphismes locaux $\Phi : (U, \text{id}) \rightarrow (W, 0)$ et $\Psi : (V, J_0) \rightarrow (W, 0)$ tels que $\Psi \circ F \circ \Phi^{-1} = \text{pr}$, la projection canonique $\mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Cela donne un redressement local de $F(U)$. Il nous suffit donc de montrer qu'au voisinage de J_0 , $F(U)$ et $\mathcal{J}(E)$ coïncident. Autrement dit, il nous faut prouver que si J est une structure presque complexe proche de J_0 , il existe $A \in GL(E)$ proche de id telle que $J = A \circ J_0 \circ A^{-1}$. Soit donc (e_1, \dots, e_n) une base complexe de (E, J_0) , c'est-à-dire une famille de vecteurs telle que $(e_1, \dots, e_n, J_0 e_1, \dots, J_0 e_n)$ soit une base de E . Pour J suffisamment proche de J_0 , la famille $(e_1, \dots, e_n, J e_1, \dots, J e_n)$ est toujours une base de E (c'est la continuité de $J \mapsto \det(e_1, \dots, e_n, J e_1, \dots, J e_n)$). L'unique isomorphisme A qui envoie la première base sur la deuxième conjugue effectivement J et $J_0 : \forall i, A e_i = e_i$, et $A(J_0 e_i) = J e_i$. On a alors $A \circ J_0 \circ A^{-1}(e_i) = A \circ J_0(e_i) = J e_i$, et $A \circ J_0 \circ A^{-1}(J e_i) = A \circ J_0(J_0 e_i) = -A e_i = -e_i = J(J e_i)$. Les endomorphismes $A \circ J_0 \circ A^{-1}$ et J coïncident donc sur une base, et sont donc égaux. Il reste à montrer que A est arbitrairement proche de id pourvu que J et J_0 soient assez proches. Si on prend une norme $|\cdot|$ sur E et que l'on note $\|\cdot\|$ la norme subordonnée, on a bien $|(A - \text{id})(e_i)| = 0$ et $|(A - \text{id})(J_0 e_i)| = |J(e_i) - J_0(e_i)| \leq \|J - J_0\| \|e_i\| \leq \|J - J_0\| \cdot \|J_0^{-1}\| \|J_0 e_i\|$, donc $\|A - \text{id}\| \leq \|J - J_0\| \cdot \|J_0^{-1}\|$.

Remarques :

- La petite preuve topologique est bien nécessaire : c'est exactement le même problème que celui qui fait que l'image d'une immersion injective n'est pas nécessairement une sous-variété ; si on comprend bien que localement, l'immersion définit une sous-variété, il faut montrer que des points qui sont éloignés dans l'ouvert de départ ne se retrouvent pas arbitrairement proches à l'arrivée...
- Il était tentant d'étudier l'application :

$$\begin{array}{ccc} \text{End}(E) & \rightarrow & \text{End}(E) \\ A & \mapsto & A^2 \end{array} ,$$

dont $\mathcal{J}(E)$ est un niveau et dont la différentielle en A est $H \mapsto AH + HA$. Cependant, s'il est vrai que le rang de cette différentielle est constant (égal à $2n^2$) sur $\mathcal{J}(E)$, cela ne suffit pas à appliquer le théorème du rang constant. Il faut pour cela obtenir la constance du rang sur un voisinage de $\mathcal{J}(E)$, ce qui n'est pas possible. Il n'est en effet pas très dur de démontrer qu'il existe un ensemble dense $\Omega \subset \text{End}(E)$ tel que, si $A \in \Omega$, $\left\{ AH + HA \mid H \in \text{End}(E) \right\}$ est $\text{End}(E)$ tout entier : le rang de cette application n'est absolument pas constant.

Pour n entier, on peut voir \mathbb{C}^n comme un \mathbb{R} -espace vectoriel. Cela donne un morphisme injectif de groupes $GL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \simeq GL(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow GL(2n, \mathbb{R}) \simeq GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que, si E est de dimension $2n$, $\mathcal{J}(E)$ est homéomorphe à l'espace quotient $GL(2n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C})$.

On peut sans perte de généralité supposer $E = \mathbb{C}^n$. Soit j la structure complexe canonique sur \mathbb{C}^n et $\varphi : GL(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{J}(\mathbb{C}^n)$ défini par $\varphi(A) = A \circ j \circ A^{-1}$. Notons \approx la relation d'équivalence définie par $A \approx B \Leftrightarrow \exists P \in GL(n, \mathbb{C}) : A = BP$. On note X l'espace quotient $GL(2n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C})$ et $\pi : GL(2n, \mathbb{R}) \rightarrow X$ la surjection canonique définis par cette relation.

Puisque, par définition, tout $P \in GL(n, \mathbb{C})$ vérifie $P \circ j = j \circ P$, on a bien que, si $A \approx B$, $\varphi(A) = \varphi(B)$. On a donc une application quotient $\bar{\varphi} : X \rightarrow \mathcal{J}(\mathbb{C}^n)$, dont on veut montrer que c'est un homéomorphisme. Elle est évidemment déjà surjective, car on a déjà vu aux questions précédentes que φ l'était.

$$\begin{array}{ccccc}
 GL(n, \mathbb{C}) & \hookrightarrow & GL(2n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi} & GL(2n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C}) \\
 & & \downarrow \varphi & \swarrow \bar{\varphi} & \\
 & & \mathcal{J}(\mathbb{C}^n) & &
 \end{array}$$

Pour montrer que $\bar{\varphi}$ est injective, prenons deux éléments A et B de $GL(2n, \mathbb{R})$ tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$. Cela implique que $A^{-1}B$ commute avec j , donc définit un endomorphisme complexe de \mathbb{C}^n . On a donc bien $A^{-1}B \in GL(n, \mathbb{C})$, et $A \approx B$.

La projection π est continue par définition, et elle est également ouverte : si O est un ouvert de $GL(2n, \mathbb{R})$, $\pi^{-1}[\pi[O]] = \bigcup_{P \in GL(n, \mathbb{C})} P \cdot O$, où $P \cdot O = \{PA \mid A \in O\}$ est ouvert, car $A \mapsto PA$

est un homéomorphisme. $\pi^{-1}[\pi[O]]$ est donc ouvert, ce qui implique, par définition de la topologie quotient, que $\pi[O]$ est ouvert.

Cela montre que $\bar{\varphi}$ est continue : si Ω est un ouvert de $\mathcal{J}(\mathbb{C}^n)$, $\bar{\varphi}^{-1}[\Omega] = \pi[\varphi^{-1}[\Omega]]$ l'est également.

De la même façon, une fois que l'on aura montré que φ était ouverte, on aura terminé la preuve que $\bar{\varphi}$ est un homéomorphisme : pour un ouvert U de X , on a en effet $\bar{\varphi}[U] = \varphi[\pi^{-1}[U]]$, ce qui démontrera que $\bar{\varphi}$ est ouverte. Mais c'est précisément ce que l'on a montré à la question précédente : pour une structure complexe donnée $J_0 = \varphi(A_0)$ et tout ouvert U de $GL(2n, \mathbb{R})$ contenant A_0 , $\varphi(U)$ est un voisinage de \mathcal{J}_0 (lors de la question précédente, on avait $A_0 = \text{id}$, ce qui ne change évidemment rien). La partie $\varphi(U)$ est donc un voisinage de chacun de ses points, et $\bar{\varphi}$ est ouvert.

Exercice 2.— La fibration de Hopf

On munit \mathbb{C}^2 et $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ des structures euclidiennes standard, et l'on considère la sphère unité dans chacun de ces espaces, soit

$$S^3 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\}, \quad S^2 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + t^2 = 1\}.$$

Donner des équations pour les espaces tangents $T_{(x,y)}S^3$ et $T_{(z,t)}S^2$.

On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire qui munit ces espaces vectoriels de leur structure euclidienne standard. S^3 et S^2 sont alors des niveaux réguliers de la fonction $z \mapsto \langle z | z \rangle$ (dont le seul point critique est 0). Leurs espaces tangents sont donc les noyaux des différentielles de ces fonctions :

$$\begin{aligned} T_{(x,t)}S^2 &= \left\{ (\xi, \theta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid \operatorname{Ré}(\bar{x}\xi) + t\theta = 0 \right\}, \\ T_{(x,y)}S^3 &= \left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid \operatorname{Ré}(\bar{x}\xi + \bar{y}\eta) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

On définit $h(x, y) = (2\bar{x}y, |x|^2 - |y|^2)$ de \mathbb{C}^2 dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Montrer que h induit une application $H : S^3 \rightarrow S^2$ de classe C^∞ (cette application est la *fibration de Hopf*.) Montrer que H est une submersion c'est-à-dire que $d_z H : T_z S^3 \rightarrow T_{H(z)} S^2$ est partout surjective.

La restriction d'une application lisse à une sous-variété est toujours lisse ; la seule chose à démontrer est que $H = h|_{S^3}$ est à valeurs dans S^2 . Soit donc $(x, y) \in S^3$:

$$\begin{aligned} \|h(x, y)\|^2 &= |2\bar{x}y|^2 + (|x|^2 - |y|^2)^2 \\ &= 4|x|^2|y|^2 + |x|^4 - 2|x|^2|y|^2 + |y|^4 \\ &= (|x|^2 + |y|^2)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pour démontrer que H est une submersion, on va calculer en tout point $(x, y) \in S^3$ le noyau de $d_{(x,y)}H : T_{(x,y)}S^3 \rightarrow T_{H(x,y)}S^2$. L'expression de la différentielle de l'application de Hopf est :

$$\forall (\xi, \eta) \in T_{(x,y)}S^3, \quad d_{(x,y)}H(\xi, \eta) = (2(\bar{x}\eta + \bar{\xi}y), \bar{x}\xi + x\bar{\xi} - \bar{y}\eta - y\bar{\eta}).$$

$$\begin{aligned} (\xi, \eta) \in \ker d_{(x,y)}H &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Ré}(\bar{x}\xi + \bar{y}\eta) = 0 \\ \bar{x}\eta + \bar{\xi}y = 0 \\ \bar{x}\xi + x\bar{\xi} - \bar{y}\eta - y\bar{\eta} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}\xi + x\bar{\xi} + \bar{y}\eta + y\bar{\eta} = 0 \\ \bar{x}\xi + x\bar{\xi} - \bar{y}\eta - y\bar{\eta} = 0 \\ \bar{x}\eta + \bar{\xi}y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}\xi + x\bar{\xi} = 0 \\ \bar{y}\eta + y\bar{\eta} = 0 \\ \bar{x}\eta + \bar{\xi}y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux premières équations sont équivalentes à l'existence de λ et μ réels tels que $\xi = i\lambda x$ et $\eta = i\mu y$. La troisième équation s'écrit alors $i\mu\bar{x}y - i\lambda\bar{x}y = 0$. Comme $\bar{x}y$ ne s'annule jamais sur S^3 , on en déduit que $\ker d_{(x,y)}H = \{(i\lambda x, i\lambda y) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. C'est donc bel et bien une droite vectorielle et H est une submersion.

Décrire les fibres $H^{-1}(p)$, $p \in S^2$.

Soit $(x, y) \in S^3$. On cherche les $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $H(\alpha x, \beta y) = H(x, y)$. Cela implique immédiatement $\bar{\alpha}\beta = 1$. On peut donc trouver $\rho \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha = \rho e^{i\theta}$ et $\beta = \rho^{-1} e^{i\theta}$. La deuxième composante de H implique alors :

$$\begin{aligned} \rho^2|x|^2 - \rho^{-2}|y|^2 = |x|^2 - |y|^2 &\Rightarrow \rho^4|x|^2 - |y|^2 = \rho^2|x|^2 - \rho^2|y|^2 \\ &\Rightarrow (\rho^4 - \rho^2)|x|^2 = (1 - \rho^2)|y|^2 \\ &\Rightarrow \rho^2(\rho^2 - 1)|x|^2 = -(\rho^2 - 1)|y|^2 \end{aligned}$$

Si $\rho \neq 1$, les membres de cette équation n'ont pas le même signe (à moins que $x = y = 0$, ce qui n'est pas possible puisque $(x, y) \in S^3$). On a donc $\rho = 1$. La réciproque étant immédiate, on obtient que la fibre $H^{-1}\{H(x, y)\}$ est le cercle $\{(e^{i\theta}x, e^{i\theta}y) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Remarque : On sait que la projection stéréographique envoie S^3 privée d'un point vers l'espace \mathbb{R}^3 . Elle permet donc de réaliser des dessins de la partition de S^3 par les fibres de Hopf. Voici un exemple, réalisé par Benoît Kloeckner :

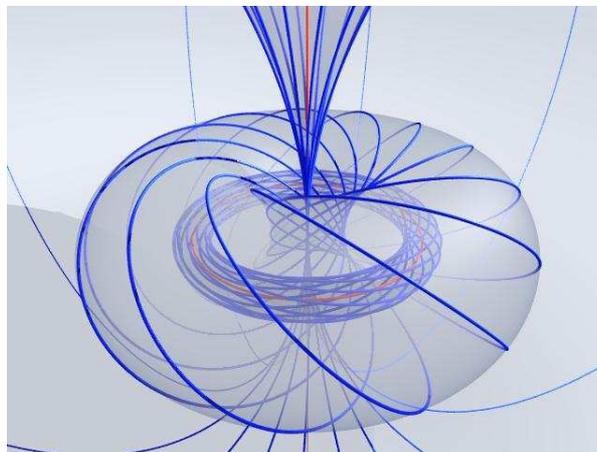


FIG. 1 – La fibration de Hopf

On trouvera également une vidéo du même phénomène sur le site internet [knotplot](http://knotplot.com).¹ On pourra méditer avec profit ces images pour se convaincre que la sphère S^3 est l'union de deux tores pleins recollés sur leur bord.

¹À l'adresse <http://knotplot.com/hopf/hopf-fibration1.mpg>.

Exercice 3.— Quelques remarques sur les applications polynomiales

Soit $f = \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ une application polynomiale. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}^n, d_z f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ est \mathbb{C} -linéaire.

Il suffit clairement de le démontrer pour les monômes. Si $F(z_1, \dots, z_n) = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$, on a, d'après la formule du binôme de Newton, pour $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$F(z_1 + \zeta_1, \dots, z_n + \zeta_n) = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} + \alpha_1 z_1^{\alpha_1 - 1} \zeta_1 z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n} + \cdots + \alpha_n z_1^{\alpha_1} \cdots z_{n-1}^{\alpha_{n-1}} z_n^{\alpha_n - 1} \zeta_n + o(\zeta).$$

Cela démontre que

$$d_{(z_1, \dots, z_n)} F : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (\zeta_1, \dots, \zeta_n) & \mapsto & (\alpha_1 z_1^{\alpha_1 - 1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n}) \zeta_1 + \cdots + (\alpha_n z_1^{\alpha_1} \cdots z_{n-1}^{\alpha_{n-1}} z_n^{\alpha_n - 1}) \zeta_n \end{array},$$

qui est une application \mathbb{C} -linéaire. Une application polynomiale $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ est alors de la forme $(P_1(z), \dots, P_m(z))$ où les $P_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sont des sommes de monômes. Sa différentielle est donc \mathbb{C} -linéaire.

Si f est une submersion en z , montrer que $T_z(f^{-1}(f(z)))$ est un sous-espace vectoriel complexe. De quelle dimension ?

L'espace tangent au niveau $f^{-1}(f(z))$ est le noyau de l'application linéaire $d_z f$. Cette application étant \mathbb{C} -linéaire, son noyau est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

On suppose $m = 1$. Montrer que f est une submersion en z si et seulement si $d_z f \neq 0$.

L'application $d_z f$ est \mathbb{C} -linéaire; son image est donc un \mathbb{C} -espace vectoriel. On a donc $\text{im } d_z f = \{0\}$, auquel cas $d_z f = 0$ ou $\text{im } d_z f = \mathbb{C}$, c'est-à-dire que f est une submersion en z .

On suppose $n = 2, m = 1$, et $h : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 et satisfaisant une équation implicite $f(z, h(z)) = 0$ où f est polynomiale et $d_{(z, h(z))} f$ ne s'annule pas. Montrer que $d_z h$ est \mathbb{C} -linéaire, c'est-à-dire que h est holomorphe.

Posons $d_{(z, h(z))} f(\zeta, \omega) = \alpha\zeta + \beta\omega$, pour des $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On peut dériver l'équation implicite $f(z, h(z)) = 0$: on obtient, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, $d_{(z, h(z))} f(\zeta, d_z h(\zeta)) = 0$, soit $\alpha\zeta = -\beta d_z h(\zeta)$. On ne peut pas avoir $\beta = 0$ (cela impliquerait $\forall \zeta \in \mathbb{C}, \alpha\zeta = 0$, donc α serait aussi nul, ce qui contredit l'hypothèse). On a donc, $d_z h(\zeta) = -\frac{\beta}{\alpha}\zeta$ et $d_z h$ est \mathbb{C} -linéaire.

À partir de maintenant, on suppose $n = 2, m = 1$ et $f(x, y) = x^3 - y^2$. On note $V_c = f^{-1}(c) \subset \mathbb{C}^2, c \in \mathbb{C}$. Montrer que V_c est une surface de classe C^∞ si $c \neq 0$. Exhiber un C^∞ -difféomorphisme de V_c sur $V_{c'}$ si $c, c' \neq 0$.

On a $d_{(x, y)} f(\xi, \eta) = 3x^2\xi - 2y\eta$, qui est une forme linéaire non nulle dès que $(x, y) \neq (0, 0)$. Donc f est une submersion sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Comme $f(0) = 0$, tous les niveaux V_c , pour $c \neq 0$, sont des surfaces lisses. Si $\alpha \neq 0$, $f(\alpha^2 x, \alpha^3 y) = \alpha^6 f(x, y)$. L'application $T_\alpha : (x, y) \mapsto$

$(\alpha^2 x, \alpha^3 y)$ fournit donc un difféomorphisme de \mathbb{C}^2 qui envoie V_c sur $V_{\alpha^6 c}$, et qui réalise même une bijection entre ces surfaces ($T_\alpha \circ T_{\alpha^{-1}} = T_{\alpha^{-1}} \circ T_\alpha = \text{id}$). Les surfaces (V_c) (pour $c \in \mathbb{C}^*$) sont donc toutes difféomorphes.

Montrer que $V_0 \setminus \{(0, 0)\}$ est une surface de classe C^∞ , que V_0 est homéomorphe à \mathbb{C} , mais n'est pas une surface de classe C^1 .

On a vu que la fonction f était une submersion sur $\Omega = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ donc $V_0 \setminus \{0\} = f|_\Omega^{-1}\{0\}$ est une sous-variété de \mathbb{C}^2 .

Soit $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ définie par $h(t) = (t^2, t^3)$. C'est une application continue et injective (si $h(t) = (u, v) \neq 0$, $t = \frac{v}{u}$, et $h^{-1}\{0\} = \{0\}$). En outre, $\|h(t)\| \geq t^2$, donc l'image réciproque d'un ensemble borné est borné. La fonction h est donc propre, et c'est un plongement topologique. On a donc un homéomorphisme entre \mathbb{C} et $h(\mathbb{C})$, dont il ne reste plus qu'à montrer que c'est V_0 tout entier. Soit donc $(x, y) \in V_0$ non nul. Comme $x^3 = y^2$, on a donc x, y non nuls. Posons $t = \frac{y}{x}$. On a bien $h(t) = \left(\frac{y^2}{x^2}, \frac{y^3}{x^3}\right) = \left(\frac{x^3}{x^2}, \frac{y^3}{y^2}\right) = (x, y)$, ce qui achève la preuve du fait que V_0 est homéomorphe à \mathbb{C} .

Pour démontrer que ce n'est pas une sous-variété de classe C^1 , nous allons étudier les vecteurs tangents à V_0 en 0. Soit donc (x_n, y_n) tendant vers 0 sans s'annuler. D'après la question précédente, on a $(x_n, y_n) = (t_n^2, t_n^3)$, avec (t_n) tendant vers 0. On a $t_n^3 = o(t_n^2)$, donc $\|(t_n^2, t_n^3)\| \sim t_n^2$, et $\frac{(t_n^2, t_n^3)}{\|(t_n^2, t_n^3)\|} \simeq \frac{(t_n^2, 0)}{|t_n^2|}$. Le cône tangent à V_0 en 0 est donc $\mathbb{C} \times 0$, le cône sur $S^1 \times 0$.

On peut alors utiliser la propriété de graphe local : si V_0 était une sous-variété, ce serait localement le graphe d'une fonction sur son espace tangent, c'est-à-dire qu'elle coïnciderait localement avec un ensemble du type : $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{C}\}$. Or, quand $(x, y) \in V_0$, le point $(x, -y)$ appartient également à V_0 : Dans tout $\{x\} \times \mathbb{C}$, pour x différent de 0, il y a au moins deux points de V_0 ; il est ainsi impossible que V_0 soit un graphe sur $\mathbb{C} \times 0$.