Cours de Calcul Différentiel 2

Jean-Claude Sikorav, janvier-mai 2008

(version du 4 mai 2008)

Contenu

A. Sous-variétés

1. Rappels : Fonctions implicites, inversion locale. Submersions, immersions.
2. Sous-variétés.
3. Paramétrages, cartes. Espace tangent.
4. Calcul différentiel sur des sous-variétés.

B. Équations différentielles

5. Équations différentielles autonomes de dimension un. Lemme de comparaison, unicité. Équations différentielles linéaires.
6. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Continuité et différentiabilité en fonction des solutions initiales.
7. Complétude, orbites périodiques, intégrales premières, fonctions de Liapounov.
8. Étude des points singuliers en dimension deux.

Bibliographie

V.I. Arnold, *Équations différentielles ordinaires*

M. Berger et B. Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes, surfaces*

M. Chaperon, *Géométrie différentielle et singularités de systèmes dynamiques*, Astérisque 138-139, 1986, Soc Math France.

M. Demazure, *Catastrophes et bifurcations*

J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, tomes 1 et 3

Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*

J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentiables*

F. Laudenbach, *Calcul différentiel et intégral*

J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*

1. Rappels : Fonctions implicites, inversion locale. Submersions, immersions.

1. Théorème des fonctions implicites (TFI)

Théorème des fonctions implicites. *Soient E_1, E_2, G trois espaces de Banach, $U \subset E_1 \times E_2$ un ouvert, (x_0, y_0) un point de U et $F : U \to G$ une application de classe C^1.*

On suppose que la dérivée partielle $D_2F(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ est un isomorphisme topologique (en dimension finie, il suffit pour cela que ce soit un isomorphisme algébrique).

(i) Il existe un voisinage ouvert produit $U_1 \times U_2 \subset U$ de (x, y_0) et une application continue $f : U_1 \to U_2$ telle que $f(x_0) = y_0$ et

$$(*) \qquad \{(x, y) \in U_1 \times U_2 \mid F(x, y) = F(x, y_0)\} = \mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in U_1\}.$$

(ii) De plus, f est de classe C^1 et sa différentielle est

$$Df(x) = -D_2F(x, f(x))^{-1} \circ D_1F(x, f(x)).$$

(iii) Si F est de classe C^k avec $k \in [2, \infty]$, f est de classe C^k.

Démonstration. (i) Rappelons d'abord l'énoncé du

Théorème de point fixe de Banach, version paramétrée. *Soient X un espace topologique, Y un espace métrique complet, et $g : X \times Y \to Y$ une application continue.*

On suppose que $(\forall x \in X)$ $g_x = g(x, .) : Y \to Y$ est une contraction uniforme, soit $\mathrm{Lip}(g_x) \leq a < 1$, avec a indépendant de x. Alors $(\forall x \in X)$ g_x a un unique point fixe $f(x)$, et l'application $f : X \to Y$ est continue.

Pour appliquer ce théorème ici, on écrit l'équation $(F(x, y) = F(x_0, y_0))$ sous la forme $(y = g(x, y) = g_x(y))$, où

$$g(x, y) := y - D_2F(x_0, y_0)^{-1}(F(x, y) - F(x, y_0)).$$

L'application g est de classe C^1, on a $g(x_0, y_0) = 0$ et

$$D_2g(x_0, y_0) = \mathrm{Id} - D_2F(x_0, y_0)^{-1}D_2F(x_0, y_0) = 0.$$

C'est pour avoir la seconde égalité qu'on a multiplié par $D_2F(x_0, y_0)^{-1}$. Par continuité de D_2g, il existe r_0 et $s > 0$ tels que $B'(x_0, r_0) \times B'(y_0, s)$ est contenu dans U et $||D_1g|| \leq \dfrac{1}{2}$ sur $B'(x_0, r) \times B'(y_0, s)$. On peut aussi supposer que $||D_1F||$ est borné sur $B'(x_0, r_0)$, disons $||D_1F|| \leq M_1$.

Pour $x \in B'(x_0, r_0)$, on a $||Dg_x|| = ||D_1g|| \leq \dfrac{1}{2}$, donc $\mathrm{Lip}(g_x) \leq \dfrac{1}{2}$ par l'inégalité des accroissements finis. Soit $r \leq r_0$, et soit $x \in B(x_0, r)$. Si $y \in B'(y_0, s)$, on a

$$\begin{aligned} ||g_x(y) - y_0|| &\leq ||g_x(y) - g_x(y_0)|| + ||g_x(y_0) - g_x(y_0)|| \\ &\leq \frac{1}{2}||y - y_0|| + ||F(x, y_0) - F(x, y_0)||. \\ &< \frac{s}{2} + M_1 r. \end{aligned}$$

Si $r = \min(r_0, \dfrac{s}{2M_1})$, ceci est $\leq s$, d'où $g_x(B'(y_0, s)) \subset B(y_0, s)$.

Comme toute boule fermée d'un Banach est complète, le théorème de point fixe s'applique à $g : B(x_0, r) \times B'(y_0, s)$: g_x a un unique point fixe $f(x)$, et f est continue de $B(x_0, r)$ dans $B'(y_0, s)$. De plus, f est à valeurs dans $B(y_0, s)$ et vérifie $f(x_0) = y_0$ par unicité.

Si l'on pose $U_1 = B(x_0, r)$ et $U_2 = B(y_0, s)$, $(*)$ est vérifié par construction, ce qui achève la preuve de (i).

(ii) L'application $x \mapsto D_2F(x, f(x)) \in \mathrm{L}(E_2, G)$ est continue, et sa valeur en x_0 appartient à l'ouvert $\mathrm{Isom}(E_2, G)$. Donc, quitte à diminuer U_1, $D_2F(x, f(x))$ est continûment inversible.

Soient $x \in U_1$ fixé et $h \in E$ tendant vers 0. Puisque F est de classe C^1 et f est continue, on a

$$\begin{aligned} 0 &= F(x+h, f(x+h)) - F(x, f(x)) \\ &= D_1F(x, f(x)).h + D_2F(x, f(x)).(f(x+h) - f(x)) + o(||h|| + ||f(x+h) - f(x))||). \end{aligned}$$

En appliquant $D_2F(x, f(x))^{-1}$, on en déduit

$$f(x+h) - f(x) + o(||f(x+h) - f(x))||) = -[D_2F(x, f(x))^{-1} \circ D_1F(x, f(x))].h + o(||h||).$$

Le membre de gauche a une norme $\geq \dfrac{1}{2}||f(x+h) - f(x))||$ pour h assez petit, celui de droite est $O(||h||)$. Donc $f(x+h) - f(x)) = O(||h||)$ et le terme $o(||f(x+h) - f(x))||)$ est un $o(||h||)$, d'où

$$f(x+h) - f(x) = -[D_2F(x, f(x))^{-1} \circ D_1F(x, f(x))].h + o(||h||).$$

Ceci prouve que f est différentiable en x et que $Df(x)$ a la valeur indiquée. Comme D_1F, D_2F et F sont continues, ceci implique la continuité de Df, donc f est de classe C^1.

(iii) Ceci résulte de (ii) et des théorèmes sur la différentiabilité d'une fonction composée.

2. Théorème d'inversion locale

Définition. Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soient $U \subset E$ et $V \subset G$ deux ouverts d'espaces vectoriels normés. Une application $f : U \to V$ est un **C^k-difféomorphisme** si f est bijective, de classe C^k ainsi que f^{-1}.

Théorème d'inversion locale. *Soient E et G deux espaces de Banach, $f : U \subset E \to G$ une application de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, et x un point de U. On suppose que $Df(x)$ est un isomorphisme.*

Alors il existe $U_1 \subset U$ ouvert contenant x tel que f induise un C^k-difféomorphisme de U_1 sur $f(U_1)$.

Démonstration. On définit $F : G \times U \to E$, $F(y, x) = f(x) - y$. Par construction, $(F(y, x) = 0)$ équivaut à $(f(x) = y)$. L'application F est de classe C^k et l'on a $F(f(x), x) = 0$.

De plus $D_2F(f(x), x) = Df(x)$ est un isomorphisme, donc par le TFI il existe un voisinage ouvert $V_1 \times V_2 \subset G \times U$ de $(f(x), x)$ et une application $g : V_1 \to V_2$ de classe C^k tels que

$$\{(y, x) \in V_1 \times V_2 \mid f(x) = y\} = \{(y, g(y)) \mid y \in V_1\}.$$

Alors $U_1 = f^{-1}(V_1)$ est un voisinage ouvert de x et f induit une bijection de U_1 sur V_1, avec $f^{-1} = g|U_1$ de classe C^k, donc $f : U_1 \to V_1$ est un C^k-difféomorphisme.

Convention. À partir de maintenant, tous les espaces vectoriels sont supposés de dimension finie. Donc (le corps de base étant le plus souvent $\mathbb{R}$, parfois $\mathbb{C}$), ils seront équipés d'une topologie canonique associée à l'unique classe d'équivalence de normes.

3. Rang d'une application différentiable. Submersions, immersions.

Rappel d'algèbre linéaire. Soient E et G espaces vectoriels de dimensions finies n et m sur un corps k (commutatif) quelconque. Soit $A : E \to G$ une application linéaire, on note $r = \mathrm{rg}(A)$ son rang. Alors est équivalente à $A_0 : k^n \to k^m$ définie par

$$A_0(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0).$$

Ceci veut dire qu'il existe des isomorphismes $\varphi : E \to k^n$ et $\psi : G \to k^m$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\varphi"', "\approx"] & G \arrow[d, "\approx"', "\psi"] \\ k^n \arrow[r, "A_0"'] & k^m \end{tikzcd}$$

Si $r = m$, A_0 est la projection de k^n sur $k^m \times \{0\}$. Si $r = n$, A_0 est l'injection $k^n \to k^n \times \{0\} \to k^m$.

Proposition. *On suppose $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La fonction «rang», de $\mathrm{L}(E, G)$ dans $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, est semi-continue inférieurement. Autrement dit, l'ensemble des $u \in \mathrm{L}(E, G)$ de rang $\geq k$ est ouvert (noter que* $(\mathrm{rg}(u) \geq k \Leftrightarrow \mathrm{rg}(u) > k - 1)$*).*

Démonstration. Via des choix de bases, on peut identifier $\mathrm{L}(E, G)$ à l'espace de matrices $\mathrm{M}(m, n)$. Alors $\mathrm{rg}(u) \geq r$ si et seulement si il existe un mineur d'ordre r de u qui est $\neq 0$. Notant $M_i(u)$, $i \in I$, les mineurs d'ordre r de u, on a donc

$$\{u \mid \mathrm{rg}(u) \geq r\} = \bigcup_{i \in I} \{x \mid M_i(u) \neq 0\},$$

qui est ouvert car les $M_i(u)$ sont continus en les coefficients de u, c'est-à-dire continus en u pour la topologie de $\mathrm{M}(m, n)$.

Remarque. On peut rendre plus intrinsèque la preuve ci-dessus en considérant l'application $\Lambda^r : \Lambda^r E \to \Lambda^r G$ induite en algèbre extérieure. On a $\mathrm{rg}(u) \geq r$ si et seulement si $\Lambda^r u \neq 0$, condition clairement ouverte.

Définitions. Soient E et G des espaces vectoriels réels de dimension finie, et soit $f : U \subset E \to G$ une application de classe C^1. Soit x un point de U.

(i) Le rang de f en x, noté $\mathrm{rg}_x(f)$, est le rang de $DF(x)$.

(ii) L'application f est une **submersion** en x si f est de classe C^1 au voisinage de x et $Df(x)$ est surjective.

(iii) C'est une **immersion** en x si f est de classe C^1 au voisinage de x et $Df(x)$ est injective.

(iv) Si f est une submersion en tout point de $A \subset U$, on dit que c'est une submersion sur A. Si $A = U$, on dit simplement que f est une submersion. De même pour une immersion.

Remarque. On a inclus la condition de classe C^1 au voisinage pour rendre les notions de submersion et d'immersion utilisables en pratique.

D'après la proposition sur la semi-continuité du rang d'une application linéaire, on a :

Proposition. *Soit $f : U \subset E \to G$ une application de classe C^1 avec E, G de dimensions finies. Alors l'application $x \mapsto \mathrm{rg}_x(f)$ est semi-continue inférieurement. En particulier :*

- l'ensemble des $x \in U$ où f est une submersion est ouvert (vide si $\dim(E) < \dim(F)$)

- l'ensemble des $x \in U$ où f est une immersion est ouvert (vide si $\dim(E) > \dim(F)$).

Donc si f est une submersion ou une immersion en x, le rang de $Df(x)$ est localement constant.

Invariance par difféomorphisme. Si φ est un difféomorphisme défini sur U et $f : \varphi(U) \to G$ est différentiable en un point $\varphi(x)$, on a $\mathrm{rg}_{\varphi(x)}(f) = \mathrm{rg}_x(f \circ \varphi)$. En effet, $D(f \circ \varphi)(x) = Df(\varphi(x)) \circ D\varphi(x)$ et $D\varphi(x)$ est un isomorphisme.

4. Linéarisabilité locale. Cas des submersions et des immersions. Théorème du rang constant.

Définitions. Soit $f : U \subset E \to G$ une application de classe C^k. On dit que f est C^k-**linéarisable** en $x \in U$ s'il existe des C^k-difféomorphismes définis sur des voisinage U_1 de x et V_1 de $f(x)$, tels que

$$\varphi(x) = 0\ ,\ D\varphi(x) = \mathrm{Id}_E$$
$$\psi(f(x)) = 0\ , D\psi(f(x)) = \mathrm{Id}_G$$

et faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"', "\approx"] & V_1 \arrow[d, "\approx"', "\psi"] \\ \varphi(U_1) \arrow[r, "Df(x)"'] & \psi(V_1) \end{tikzcd}$$

Autrement dit :

$$f = \psi^{-1} \circ Df(x) \circ \varphi.$$

On dit aussi que f est localement C^k-*équivalente* à son application linéaire tangente.

Si l'on peut prendre $V_1 = V_2$ et $\psi = \mathrm{Id}$, soit $f = Df(x) \circ \varphi$, on dit que f est **linéarisable par reparamétrage à la source**.

De même, si l'on peut prendre $U_1 = U_2$ et $\varphi = \mathrm{Id}$, soit $f = \psi \circ Df(x)$, on dit que f est **linéarisable par reparamétrage au but**.

Remarque. Il est facile de voir que f est linéarisable en x si et seulement si f se factorise localement en

$$f = \psi_1^{-1} \circ A \circ \varphi_1$$

où ψ_1 et φ_1 sont des C^k-difféomorphismes définis au voisinage de x et de $f(x)$ (pas forcément d'images nulles), et A est linéaire. De même, elle se linéarise par reparamétrage à la source, resp. au but, si l'on peut écrire $f = \psi_1^{-1} \circ A$, resp. $f = A \circ \varphi_1$.

En effet, si $f = \psi_1^{-1} \circ A \circ \varphi_1$ comme ci-dessus, il suffit de poser $\varphi = D\varphi_1(x)^{-1} \circ \varphi_1$, $\psi = \psi_1 \circ D\psi_1(f(x))^{-1}$. On a alors $f = \psi \circ B \circ \varphi$, avec $D\varphi(x) = \mathrm{Id}_E$, $D\psi(f(x)) = \mathrm{Id}_F$, et

$$B = D\psi_1(f(x))^{-1} \circ A \circ D\varphi(x)^{-1} = D(\psi_1^{-1} \circ A \circ \varphi)(x) = Df(x).$$

Les cas les plus importants de linéarisabilité sont donnés par le théorème suivant.

Théorème (linéarisabilité des submersions et des immersions). *Soient E, F, G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.Soient $f : U \subset E \to G$ une application de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, et x_0 un point de U.*

(i) Si f est une submersion en x_0, elle est C^k-linéarisable par reparamétrage à la source.

(ii) Si f une immersion en x_0, elle est C^k-linéarisable par reparamétrage au but.

Démonstration (i) Soit $S \subset E$ un supplémentaire de $\ker(Df(x_0))$. Puisque $Df(x_0)$ est surjective, elle induit un isomorphisme $A : S \to G$.

Notons $p_K : E \to \ker(Df(x_0))$ la projection parallèlement à S. Alors l'application

$$\varphi : U \to G \times \ker(Df(x_0)) \ , \ \varphi(x) = (f(x), p_K(x)),$$

est de classe C^k et sa différentielle en x_0,

$$D\varphi(x_0) : E = S \oplus \ker(Df(x_0)) \to G \times \ker(Df(x_0))$$

est donnée par la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\ker(Df(x_0))} \end{pmatrix}$, donc est un isomorphisme.

Par le théorème d'inversion locale, φ induit un C^k-difféomorphisme sur un voisinage de x_0. Comme $f = \mathrm{pr}_1 \circ \varphi$ où pr_1 est la projection de $F \times \ker(Df(x_0))$ sur G, ceci prouve (i).

(ii) La preuve est duale de celle de (i). Soit $S \subset G$ un supplémentaire de $\mathrm{im}(Df(x_0))$. Puisque $Df(x_0)$ est injective, elle induit un isomorphisme $A : E \to \mathrm{im}(Df(x_0))$.

Notons $p_I : F \to \mathrm{im}(Df(x_0))$ la projection parallèlement à S. Alors l'application

$$\varphi : U \times S \to \mathrm{im}(Df(x_0)) \oplus S = G \ , \ \varphi(x, s) = f(x) + s,$$

est de classe C^k et sa différentielle en x_0,

$$D\varphi(x_0) : E \times S \to \mathrm{im}(Df(x_0)) \oplus S$$

est donnée par la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_S \end{pmatrix}$, donc est un isomorphisme.

Par le théorème d'inversion locale, φ induit un C^k-difféomorphisme sur un voisinage $U_1 \times U_2$ de $(x_0, 0)$. Comme $f = \varphi \circ i$ où i est l'injection $E \to E \times \{0\} \subset E \times S$, ceci prouve (ii).

Remarque. En dimension infinie, la preuve (i) fonctionne pourvu que $\ker(Df(x_0))$ ait un supplémentaire fermé. En particulier, si E est un espace de Hilbert. Celle de (ii) demande que $\mathrm{im}(Df(x_0))$ soit fermé et ait un supplémentaire fermé.

Le résultat suivant est d'application plus rare que le précédent (voir plus loin le cas le plus typique).

Théorème du rang constant. *Soient E et G deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f : U \subset E \to G$ une application de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, et x_0 un point de U.*

On suppose que le rang $\mathrm{rg}(Df(x))$ est constant au voisinage de x_0 (on dit que f est une **subimmersion en** *x_0). Alors f est C^k-linéarisable en x_0.*

Démonstration. Quitte à diminuer U, on peut supposer que le rang de f est constant sur U. Soient $S_1 \subset E$ un supplémentaire de $\ker(Df(x_0))$ et $S_2 \subset G$ un supplémentaire de $\mathrm{im}(Df(x_0))$.

Alors $Df(x_0) : S_1 \oplus K \to I \oplus S_2$ est représentée par la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où A est un isomorphisme de S_1 sur I.

On note $p_K : E \to K$ et $p_I : G \to \mathrm{im}(Df(x_0))$ les projections associées, et on définit

$$\varphi : U \to \mathrm{im}(Df(x_0)) \times \ker(Df(x_0)) \ , \ \varphi(x) = (p_I \circ f(x), p_K(x)).$$

Elle est de classe C^k, et la différentielle

$$D\varphi(x_0, 0) : S_1 \oplus \ker(Df(x_0)) \to \mathrm{im}(Df(x_0)) \times \ker(Df(x_0))$$

est représentée par la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\ker(Df(x_0))} \end{pmatrix}$, donc est un isomorphisme. Donc φ induit un C^k-difféomorphisme sur un sous-voisinage U_1 de x_0. On peut supposer que $\varphi(U_1)$ est un ouvert produit $V \times W \subset \mathrm{im}(Df(x_0)) \times \ker(Df(x_0))$, avec W convexe.

Soit $(y, z) \in V \times W$. Comme $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi = p_I \circ f$, on a

$$f \circ \varphi^{-1}(y, z) = y + h(y, z),$$

où h est une application de classe C^k de $V \times W$ dans S_2, telle que $Dh(f(x), p_K(x)) = 0$. Donc $D(f \circ \varphi^{-1})(y, z))$ est représentée par la matrice par blocs $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_I & 0 \\ D_1h(y, z) & D_2h(y, z) \end{pmatrix}$. Le rang de cette matrice est

$$\dim(I) + \mathrm{rg}(D_2h(y, z)) = \mathrm{rg}(Df(x)) + \mathrm{rg}(D_2h(y, z)).$$

Puisque φ est un difféomorphisme, c'est ègal au rang de $Df(\varphi^{-1}(y, z))$. Par l'hypothèse de rang constant, $D_2h(y, z) = \dfrac{\partial h}{\partial z}$ est nulle. Comme W est convexe, ceci implique, par le théorème des accroissements finis, que $h(y, z) = h(y, 0)$, soit

$$f \circ \varphi^{-1}(y, z) = y + h(y, 0).$$

On définit enfin $\psi : G \to G$ par

$$\psi(y) = y - h \circ p_I(y).$$

Alors $D\psi(f(x)) = \mathrm{Id}_m$, donc ψ est un C^k-difféomorphisme local en $f(x)$. Enfin, si $(y, z) \in V \times W$ on a

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(y, z) &= \psi(y + h(y)) \\ &= (y + h(y)) - h(y) \\ &= y. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a $f = \psi^{-1} \circ \mathrm{pr}_1 \circ \varphi$, donc f est linéarisable en x.

Remarque. On en déduit que f se factorise localement en $i \circ s$, où i est une immersion et s est une submersion.

Exemple. Soit $A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, on définit $f_A : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, $f(M) = MAM^{-1}$. Alors

$$df(M).H = HAM^{-1} - MAM^{-1}HM^{-1}$$

donc $\ker(df(M))$ est l'ensemble des matrices H telles que $M^{-1}H$ commute avec A, donc est de dimension constante. Donc f_A est de rang constant. Si A est diagonalisable, ce rang est égal à $n - \sum(m_\lambda - 1)$ où les les m_λ sont les multiplicités des valeurs propres.

2. Sous-variétés.

1. Définitions

Sous-variété. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $m \in [[0, \dim(E)]]$, et $V \subset E$ un sous-ensemble non vide. On dit que V est une **sous-variété de classe C^k et de dimension** m de E si pour tout $x \in V$ il existe un voisinage ouvert U de x dans E, un voisinage ouvert U' de 0 dans $\mathbb{R}^n$, et un C^k-difféomorphisme $\Phi : U \to U'$ tels que

$$\Phi(V \cap U) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U'.$$

On appellera Φ **redressement local** en x de V sur $\mathbb{R}^m \times \{0\}$.

Remarques. 1) Si on ne précise pas la classe de différentiabilité k d'une sous-variété, c'est qu'elle vaut 1. Si $k = \infty$, on dit que V est **lisse**.

2) Quitte à remplacer Φ par $\Phi - \Phi(x)$, on peut supposer $\Phi(x) = 0$.

3) On peut élargir la notion de redressement local en remplaçant $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ par n'importe quel couple (E_1, F) où E_1 est un espace vectoriel (ou affine) réel de dimension n et F un sous-espace de dimension m. Il est clair que l'existence d'un tel redressement implique celle d'un redressement avec $(E_1, F) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m \times \{0\})$. Exemple fréquent : $E_1 = E$.

4) Clairement, la notion de sous-variété est locale : V est une sous-variété de dimension m si et seulement si tout $x \in V$ a un voisinage ouvert U dans E tel que $V \cap U$ est une sous-variété de dimension n.

Invariance de la dimension. La dimension de V ne dépend que de V. En effet, si U_1 est un voisinage de x et Φ_1 un difféomorphisme de U_1 sur U_1' qui envoie $V \cap U_1$ sur $(\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap U'$, alors $\Psi = \Phi_1 \circ \Phi^{-1}$ est un difféomorphisme de $U_2 = \Phi(U \cap U_1)$ sur $U_3 = \Phi_1(U \cap U_1)$ qui envoie $(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U_2$ sur $(\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap U_3$.

Donc $D\Psi(\Phi(x))$ induit un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^p \times \{0\}$, donc $m = p$.

La **codimension** de V est $\mathrm{codim}(V) = \dim(E) - \dim(V)$. Si $\dim V = 1$, resp. $\dim V = 2$, on dit que V est une **courbe**, resp. une **surface**. Si codim $V = 1$, V est une **hypersurface**.

Remarque. On précisera plus tard le rapport de cette notion de courbe avec celle de «courbe paramétrée».

2. Premiers exemples de sous-variétés

1) Une sous-variété de dimension 0 est un sous-ensemble discret. Une sous-variété de codimension 0 est un ouvert. Et réciproquement.

2) Un sous-espace vectoriel ou affine est une sous-variété lisse de même dimension.

3) **Graphes.** Soient E et G deux espaces de dimension finie. Soit $f : U \subset E \to G$ une application de classe C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Son graphe $\Gamma(f) = \{(x, f(x) \mid x \in U\}$ est une sous-variété de dimension $\dim(E)$ de $E \times G$. En effet, l'application $\Phi(x, y) = (x, y - f(x))$ est un C^k-difféomorphisme de $E \times G$ qui envoie $\Gamma(f)$ sur $(E \times \{0\}) \cap (U \times G)$.

Plus généralement, si E est décomposé en somme directe $E = F \oplus G$ et si $f : U \subset F \to G$ est de classe C^k, le sous-ensemble

$$V = \{x + f(x) \mid x \in U\} \subset E$$

est une sous-variété de classe C^k et de dimension $\dim(F)$. On dira que c'est un **graphe C^k sur F à valeurs dans G**.

4) Soit E un espace euclidien de dimension finie. La sphère $S_E(r) = \{x \in E \mid ||x||^2 = r^2\}$ $(r > 0)$ est une hypersurface lisse.

En effet, si $x_0 \in S_E(r)$, soit $U = \{y \in E \mid (y, x) > 0\}$. On a $E = x^\perp \oplus \mathbb{R}x_0$, et $S(r) \cap U$ est le graphe de l'application C^∞ : $y \in B_{x^\perp}(r) \mapsto \sqrt{r^2 - ||y||^2}\ x$, donc est une sous-variété lisse de codimension 1.

En particulier, $S^1(r) \subset \mathbb{R}^2$ (variante : $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$) est une courbe lisse, $S^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ est une surface lisse.

5) Soit $V = \{x, y \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Alors V est une surface lisse.

En effet, soit (x_0, y_0) un point de V. Alors x_0 ou $y_|$ est non nul, sans perte de généralité on peut supposer $y_0 \neq 0$ soit $|1 - x_0^2| > 0$. Soit $U_1 = \{x \in \mathbb{C} \mid |x^2 - x_0^2| < |1 - x_0^2|\}$, c'est un ouvert non vide . Alors il existe une détermination continue r de

$$\sqrt{1 - x^2} = \Big(1 - \frac{x^2 - x_0^2}{1 - x_0^2}\Big)^{1/2}$$

sur U_1, qui est en fait C^∞ en x. Ceci se voit par exemple en l'écrivant comme une série entière convergente en $\dfrac{x^2 - x_0^2}{1 - x_0^2}$ (cf aussi le cours d'analyse complexe). Soit $U = \{(x, y) \in U_1 \times \mathbb{C} \mid |y - r(x)| < 2\sqrt{|1 - x^2|}\} \subset \mathbb{C}^2$. Alors $V \cap U$ est le graphe de r, donc est une surface lisse.

Autre preuve : soit $V' = \{x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid xy = 1\}$. Clairement, V' est le graphe de $x \in \mathbb{C}^* \mapsto x^{-1}$, donc une surface lisse. Soit $\Phi(x, y) = (x + iy, x - iy)$, c'est un automorphisme linéaire de $\mathbb{C}^2$ et on a $\Phi(V) = V'$. Donc V est un graphe C^∞ sur $F = \Phi^{-1}(\mathbb{C} \times \{0\})$, à valeurs dans $G = \Phi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{C}$.

Remarque. Cette variété est homéomorphe à $\mathbb{C}^*$ ou $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, donc non compacte, à la différence des sphères.

3. Premières propriétés des sous-variétés

1) Tout redressement local d'une sous-variété U de dimension m induit un homéomorphisme d'un ouvert $V \cap U$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Quitte à diminuer U, on peut supposer que l'image est une boule, donc est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$.

Donc toute sous-variété de dimension m est **localement homéomorphe à** $\mathbb{R}^m$: tout point a un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^m$.

Remarques. L'invariance topologique de la dimension, c'est-à-dire le fait que deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes si $n \neq m$, est vraie (théorème de Brouwer, appelé aussi *invariance du domaine*) mais pas facile si n et m sont ≥ 2.

2) Soit U un ouvert de E. Si V est une sous-variété de classe C^k et de dimension m, il en est de même de $V \cap U$. Autrement dit, tout ouvert d'une sous-variété est une sous-variété (de même classe et de même dimension).

3) Soit $\Phi : U \to U'$ un C^k-difféomorphisme entre deux ouverts de E, E'. Si $V \subset U$ est une sous-variété de classe C^k, $\Phi(V)$ est une sous-variété de classe C^k et de même dimension.

On dit que V et $\Phi(V)$ sont **C^k-difféomorphes**. Il est clair que l'on définit ainsi une relation d'équivalence entre les sous-variétés des espaces vectoriels réels de dimension donnée. On généralisera plus tard cette définition à des sous-variétés d'espaces de dimensions différentes.

4) Toute sous-variété est localement connexe par arcs. Toute composante connexe d'une sous-variété V est un ouvert de V, donc une sous-variété (de même classe et de même dimension).

5) Soient E un espace vectoriel (réel de dimension finie) et soit G un sous-espace vectoriel. Une sous-variété de G est la même chose qu'une sous-variété de E contenue dans G.

6) **Produit de sous-variétés.** Soient $V \subset E$ et $V' \subset E'$ deux sous variétés. Alors $V \times V'$ est une sous-variété de $E \times E'$, de dimension $\dim V + \dim V$. De même pour un produit fini $V_1 \times \cdots \times V_r \subset E_1 \times \cdots \times E_r$.

Exemple : le n-tore

$$T(r_1, \cdots, r_n) = \{(z_1, \cdots, z_n) \mid (\forall i)\ |z_i| = r_i\} = S^1(r_1) \times \cdots \times S^1(r_n) \subset \mathbb{C}^n.$$

4. Exemples de non-sous-variétés

1) Si $V = [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ (ou $\subset \mathbb{R}^n$), ce n'est pas une sous-variété. En effet, tout voisinage connexe U de 0 dans V est de la forme $[0, a[$ donc homéomorphe à V, et donc n'est homéomorphe à aucun $\mathbb{R}^m$: pour $m = 1$, parce que 0 ne disconnecte pas U. Pour $m \geq 2$, car tout point de $U \setminus \{0\}$ disconnecte U. Pour $m = 0$, c'est évident.

2) Si $V = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, ce n'est pas une sous-variété. En effet, de nouveau tout voisinage connexe U de $(0,0)$ dans V est homéomorphe à V. Comme $(0,0)$ coupe U en 4 composantes, U n'est homéomorphe à aucun $\mathbb{R}^m$.

3) Soit $V = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$ de sorte que $(0,0)$ est un point de rebroussement de première espèce. Alors $(t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2, t^3))$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur V (*exercice :* montrer cela), mais V n'est pas une sous-variété : nous montrerons cela plus tard. De même si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

5. Sous-variétés définies par des équations.

Valeurs régulières. Soit $f : U \subset E \to G$ une application différentiable. On dit que $c \in G$ est une **valeur régulière** de f si f est une submersion en tout point de $f^{-1}(\{c\})$. Autrement dit : il existe un voisinage U_1 de $f^{-1}(\{c\})$ sur lequel f est C^1 et $Df(x)$ est toujours surjective.

Remarques. (i) Si $f^{-1}(\{c\})$ est vide, c est une valeur régulière. Si $\dim(G) > \dim E$, toutes les valeurs régulières sont de ce type. Si c est une valeur régulière de f telle que $f^{-1}(\{c\})$ est non vide, on dira que $f^{-1}(\{c\})$ est un **niveau régulier** de f. On le notera aussi $(f = c)$.

(ii) Le *théorème de Sard* garantit qu'il y a beaucoup de valeurs régulières : si f est de classe C^∞ (ou de classe C^k avec $k \geq \max(1, \dim E - \dim(G))$), les valeurs régulières forment un ensemble de mesure pleine.

Le théorème suivant est la forme géométrique du théorème des fonctions implicites. C'est le résultat le plus utile pour montrer qu'une partie de E est une sous-variété.

Théorème. *Soient E et G deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f : U \subset E \to G$ une application une application de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Alors tout niveau régulier de f est une sous-variété de classe C^k de E, de codimension égale à* $\dim(G)$.

Cas particulier. Si $G = \mathbb{R}$ c'est une hypersurface. On dit qu'elle est **définie par une équation (régulière) globale.**

Démonstration. Soit $c \in f(U)$ tel que f est une submersion sur $f^{-1}(\{c\})$, et soit x un point de $f^{-1}(\{c\})$. Le théorème de linéarisation d'une submersion dit qu'on a une factorisation $f|U_1 = Df(x) \circ \varphi$, où φ est un C^k-difféomorphisme $(U_1, x) \to (f(U_1), 0)$. Donc

$$f^{-1}(\{c\}) \cap U_1 = (f|U_1)^{-1}(\{c\}) = \varphi^{-1}(\ker Df(x) \cap f(U_1)).$$

Donc $\Phi = \varphi^{-1}$ est un redressement local en x de $f^{-1}(\{c\})$ sur $\ker(Df(x))$, qui est de dimension constante égale à $\dim(E) - \dim(G)$. Donc $f^{-1}(\{c\})$ est une sous-variété de classe C^k et de codimension $\dim(G)$.

Remarque. La condition de submersion est essentielle : on peut montrer que n'importe quel fermé $F \subset U$ est l'ensemble des zéros d'une fonction C^∞ sur U.

Exemples. 1) On a déjà vu que si E est euclidien, la sphère $S_E(r)$ est une hypersurface lisse. On peut le retrouver en remarquant que c'est le niveau $(f = r^2)$ pour $f(x) = ||x||^2$ qui est C^∞. Comme $\nabla f(x) = 2x$, f est une submersion hors de 0, donc ce niveau est régulier.

2) **Surfaces de révolution.** Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ une courbe définie par l'équation globale $(f = c)$, c niveau régulier. (On verra que toute courbe plane est de ce type). On suppose que C est contenue dans $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$. Donc on peut supposer que f est une submersion définie sur un ouvert de $U_1 \subset]0, +\infty[\times\mathbb{R}$.

La **surface de révolution** S engendrée par C est l'ensemble des points obtenu en faisant tourner la courbe C dans le plan des (x, z) autour de l'axe des z. Autrement dit, en notant $p(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, z) = (r, z)$, $U = p^{-1}(U_1)$ et $F = f \circ p : U \to \mathbb{R}$, on a

$$S = p^{-1}(C) = p^{-1}(f^{-1}(\{c\})) = F^{-1}(\{c\}).$$

Or F est de la même différentiabilité que f, et est une submersion car f et p sont des submersions : pour f, c'est l'hypothèse, et pour p, sa différentielle est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est toujours de rang 2.

3) **Courbes algébriques complexes.** Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ un polynôme, qu'on identifie à une fonction de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$. Celle-ci est de classe C^∞ car polynomiale réelle, calculons sa différentielle. Si $P = \sum a_{i,j} X^i Y^j$, $(x, y), (h, k) \in \mathbb{C}^2$ avec $(h, k) \to (0, 0)$, on a

$$P(x + h, y + k) - P(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x} h + \frac{\partial P}{\partial y} k + \sum_{i+j \geq 2} b_{i,j} h^i k^j.$$

Ici $\displaystyle\frac{\partial P}{\partial x} = \sum_{i,j} i a_{i,j} X^{i-1} Y^j$, $\displaystyle\frac{\partial P}{\partial y} = \sum_{i,j} j a_{i,j} X^i Y^{j-1}$, l'égalité ci-dessus étant valide sur n'importe quel corps. Quand $(h, k) \to (0, 0)$, le dernier terme est un $o(||(h, k)||)$. Donc

$$DP(x, y).(h, k) = \frac{\partial P}{\partial x} h + \frac{\partial P}{\partial y} k.$$

On constate que cette différentielle est $\mathbb{C}$-**linéaire**. Donc son rang sur $\mathbb{R}$ est 0 ou 0 : pour que P soit une submersion en (x, y) il suffit que $(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}) \neq (0, 0)$.

Supposons P non constant. Alors P estsurjectif (pourquoi ?). Un niveau régulier de P est donc un point $c \in \mathbb{C}$ tel que $(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y})$ ne s'annule pas sur $P^{-1}(c)$. On peut montrer (cas particulier du théorème de Bézout) que le nombre des valeurs critiques de P est fini. Si c est une valeur régulière, $P^{-1}(c)$ est une surface lisse.

Exemple. Si $P = (X-a)(X-b)(X-c) - Y^2$ avec a, b, c distincts, on voit facilement que 0 est une valeur régulière donc $P^{-1}(0)$ est une surface lisse. On peut montrer qu'elle est difféomorphe à un tore privé d'un point [application d'Abel-Jacobi : $p \in P^{-1}(0) \mapsto [\int_{p_0}^{p} \frac{dx}{y}] \in \mathbb{C}/\Lambda$].

Exercice. Si a, b, c ne sont pas distincts, $P^{-1}(0)$ n'est pas une sous-variété.

4) **Groupes classiques.** (i) Le groupe **spécial linéaire** $\mathrm{SL}(E) := \{x \in \mathrm{L}(E) \mid \det(x) = 1\}$ est une hypersurface lisse de $\mathrm{L}(E)$. En effet, on a $\det(\mathrm{Id} + h) = 1 + \mathrm{tr}(h) + o(||h||^2)$, donc la dérivée en Id de l'application det est $h \mapsto \mathrm{tr}(h)$. Pour avoir la dérivée en $x \in \mathrm{GL}(E)$, on écrit $\det(x + h) = \det x \det(\mathrm{Id} + x^{-1}h)$, d'où

$$D\det(x).h = \det x \ \mathrm{tr}(x^{-1}h).$$

En particulier, det est une submersion sur $s^{-1}(\mathbb{R}^*) = \mathrm{GL}(E)$, donc $\mathrm{SL}(E) = s^{-1}(\{1\})$ est une hypersurface lisse.

(ii) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, muni d'un produit scalaire euclidien. On note A^* l'adjoint d'un endomorphisme A. Le groupe orthogonal est $\mathrm{O}(E) = \{A \in \mathrm{L}(E) \mid A^*A = \mathrm{Id}\}$. Il s'écrit donc $s^{-1}(\{\mathrm{Id}\})$, où $s(A) = A^*A$. L'application s est C^∞ et à valeurs dans l'espace S des endomorphismes auto-adjoints. Calculons sa différentielle :

$$Ds(A).h = A^*h + h^*A = (A^*h) + (A^*h)^*.$$

Si A est inversible, $h \mapsto A^*h$ est un automorphisme de $\mathrm{L}(E)$, donc $Ds(A)$ est surjectif. Donc s est une submersion sur $s^{-1}(\mathrm{Id})$, donc $\mathrm{O}(E)$ est une sous-variété de codimension $\dim(S) = \frac{n(n+1)}{2}$. Donc

$$\dim(\mathrm{O}(E)) = \dim \mathrm{L}(E) - \dim(S) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Remarque. Sans restreindre le but à S, on aurait pu appliquer le théorème du rang, mais comme on le voit ce n'est pas vraiment une application de ce résultat.

Le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$ est la composante connexe de l'identié dans $\mathrm{O}(E)$, c'est donc une variété de la même dimension.

Remarque. Le théorème admet une réciproque locale (exercice) : si $V \subset E$ est une sous-variété de classe C^k et de codimension q, tout point $x \in V$ admet une fonction C^k définie sur un voisinage U de x telle que $V \cap U$ est un niveau régulier de f.

Mais la version globale n'est pas toujours vraie : par exemple, il existe (à partir de la dimension ambiante 3) des hypersurfaces de codimension un qui ne sont pas définies par une équation globale. Intuitivement, ce sont des hypersurfaces *unilatères* (à un seul côté). L'exemple le plus célèbre est le **ruban de Möbius** dans $\mathbb{R}^3$: on peut le définir par recollement des deux petits côtés d'un rectangle en papier après un demi-tour. Donnons une définition formelle : M est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$ engendré par l'intervalle $]1,3[\times\{(0,0)\}$ que l'on fait tourner autour du point $(1,0)$ dans le plan (x,z) tout en faisant tourner ce plan autour de l'axe des z, la première rotation se faisant à fréquence moitié de la seconde :

$$\begin{aligned} M &= \bigcup_{\theta \in [0,2\pi]} R_z^\theta \circ R_{x,z}^{\theta/2}(]1,3[\times\{(0,0)\}) \\ &= \{(\cos\theta(1 + t\cos\frac{\theta}{2}), \sin\theta(1 + t\cos\frac{\theta}{2}), \sin\frac{\theta}{2}) \mid \theta \in [0,2\pi], t \in]-1,1[\} \end{aligned}$$

Exercice. Montrer que l'application $(\theta, t) \in [0, 2\pi[\times]-1, 1[\to M$ définie ci-dessus est bijective et que sa restriction à $]0, 2\pi[\times]-1, 1[$ est une immersion lisse.

Soit P_θ le demi-plan $R^\theta_{x,z}(\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$. Montrer que $M \setminus P_\theta$ est définie par une équation lisse régulière explicite.

Cependant, on peut montrer (ce n'est pas facile) que toute hypersurface compacte est définie par une équation globale. Nous verrons aussi que toute courbe dans le plan admet une équation globale.

3. Paramétrages, cartes. Espace tangent.

1. Plongements, applications propres.

Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques. On dit que f est

• un **plongement** (topologique) si c'est un homéomorphisme de X sur son image $f(X)$.

• une application **propre** si Y est localement compact et si l'image réciproque de tout compact est compacte. Noter que la deuxième condition est toujours vérifiée si X est compact.

Proposition. *Une application linéaire injective $A : E \to G$ entre espaces vectoriels de dimension finie est propre.*

Démonstration. On a $||x|| \sim ||A.x||$, donc l'image réciproque d'un borné est bornée. Tout compact étant fermé borné, son image réciproque aussi donc est compacte.

Remarques. Il suffit en fait que la source soit de dimension finie. Par ailleurs, si E est un espace vectoriel normé, la propreté de l'identité de E implique que E est de dimension finie (théorème de Riesz).

Proposition (rappel). *Soit $f : X \to Y$ une application continue d'un espace topologique compact vers un espace séparé. Alors f est fermée, c'est-à-dire que l'image de tout fermé est fermée.*

Corollaire. *Si de plus f est injective, c'est un plongement.*

Remarque. Si X n'est pas compact, c'est faux en général. Exemple : $f(x) = e^{ix}$, de $[0, 2\pi[$ sur $\mathbb{U}$.

Proposition. *Soit $f : X \to Y$ une application propre. Alors f est fermée.*

Démonstration. Soit $A \subset X$ un fermé. Soit $y \in Y$ adhérent à $f(A)$, on veut montrer que $y \in f(A)$. Soit $V \subset Y$ un voisinage compact de y, alors tout sous-voisinage $V_1 \subset V$ de y rencontre $f(A)$ donc rencontre $f(A \cap f^{-1}(V)$. Donc y est adhérent à $f(A \cap f^{-1}(V))$, qui est fermé puisque $f(A \cap f^{-1}(V))$ est fermé dans le compact $f^{-1}(V)$, et que Y est séparé. Donc $y \in f(A)$, cqfd.

Corollaire. *Soit $f : X \to Y$ une application continue injective et propre (donc Y est localement compact). Alors c'est un plongement.*

Plongement différentiable. Une application $f : U \subset E \to G$ est un **plongement de classe** C^k ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) si c'est une immersion de classe C^k et un plongement topologique. Sans préciser k, on dira aussi **plongement différentiable.**

Remarque. Il ne suffit pas que f soit une immersion injective.

Exemple 1. Soit $f(t) = (\sin t \cos t, \sin t)$, définie sur $]0, 2\pi[$. L'image (en forme de huit) est définie par l'équation $x^2 - y^2 + y^4 = 0$, qui n'est pas régulière en $(0, 0)$. Ce n'est pas un plongement car l'image est compacte et pas la source.

Exercice. montrer que l'image n'est pas une sous-variété.

Exemple 2. Soit $f(t) = (e^{it}, e^{i\alpha t}) \in \mathbb{C}^2$, avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (orbite d'un flot unitaire irrationnel). Alors f est une immersion injective, mais n'est pas un plongement car l'adhérence de $f(\mathbb{R})$ est le tore $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$, donc $f(\mathbb{R})$ n'est pas localement fermé.

Exercice. Si X est un espace topologique et $A \subset X$, montrer l'équivalence des propriétés suivantes (on dit alors que A est **localement fermée**) :

(i) Tout point $a \in A$ a un voisinage ouvert U dans X tel que $A \cap U$ est fermé dans U.

(ii) Tout point $a \in A$ a un voisinage ouvert U dans X tel que $A \cap U = \bar{A} \cap U$.

(iii) Il existe $U \subset X$ ouvert et $F \subset X$ fermé tels que $A \cap U = F \cap U$.

(iv) Il existe $U \subset X$ ouvert tel que $A \cap U = \bar{A} \cap U$.

Proposition. *Soit $f : U \subset E \to G$ une application de classe C^k. Si f est une immersion en x, il existe un voisinage $U_1 \subset U$ de x tel que $f|U_1$ est un plongement.*

Démonstration. Le théorème de linéarisation d'une immersion dit qu'on a une factorisation $f|U_1 = \psi \circ Df(x)$, où ψ est un C^k-difféomorphisme.

Comme $Df(x)$ est une application linéaire injective et que E est de dimension finie, elle est propre, donc est un plongement. Donc $f|U_1$ est un plongement.

2. Paramétrages et cartes.

Définitions. Soit V une sous-variété de dimension m. Un **paramétrage** (local) de V est un plongement $\psi : W \subset \mathbb{R}^m \to V$, où W un ouvert de $\mathbb{R}^m$, d'image un ouvert $V_1 \subset V$. Si $\psi(W)$ contient x, on a un paramétrage en x. Si $\psi(W) = V$ on a un paramétrage global.

Une **carte** de V est l'inverse d'un paramétrage. Autrement dit, c'est une application $\varphi : V_1 \to \mathbb{R}^m$, définie sur un ouvert de V, d'image W ouverte et telle que $\psi = \varphi^{-1}$ est une immersion de classe C^k. On dit que V_1 est un **domaine de carte**.

Remarque. Bien sûr, on peut remplacer $\mathbb{R}^m$ par un espace vectoriel de dimension m.

Théorème. *(i) Soient W un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et $\psi : W \to E$ un plongement différentiable. Alors $\psi(W)$ est une sous-variété de E de dimension m.*

(ii) Soit V une sous-variété de dimension m, et soit $\psi : W \subset \mathbb{R}^m \to V$ une immersion injective. Alors ψ est un paramétrage de V.

Démonstration. (i) Soient w un point de W, et $x = \psi(w)$. Le théorème de linéarisation d'une immersion dit qu'il existe un voisinage ouvert W_1 de x et une factorisation $f|W_1 = \psi \circ Df(x)$, où ψ est un C^k-difféomorphisme. Comme f est un homéomorphisme sur son image, $f(W_1)$ est ouvert dans $f(W)$ donc dans V, donc il suffit de prouver que $f(W_1)$ est une sous-variété.

L'injection linéaire $A = Df(x) : E \to G$ est un homéomorphisme sur son image. Donc $A(W_1)$ est un ouvert dans le sous-espace vectoriel $A(E)$, donc c'est une sous-variété lisse de dimension m. Comme ψ est un C^k-difféomorphisme, l'image $f(W_1) = \psi(A(W_1))$ est une sous-variété de dimension m et de classe C^k, cqfd.

(ii) Il faut montrer 1) que l'image $\psi(W)$ est ouverte et 2) que ψ est un homéomorphisme sur cette image.

1) Soit $x \in \psi(W)$, et soit $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ un redressement local qui envoie $V \cap U$ dans $\mathbb{R}^m \times \{0\}$, il suffit de montrer que $\psi(W) \cap U$ est ouvert. Or

$$\psi_1 := \Phi \circ \psi : W \cap \psi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^m \times \{0\}$$

est une immersion injective équidimensionnelle, donc un difféomorphisme, donc d'image ouverte. Donc

$$\psi(W \cap U) = \Phi^{-1}(\psi_1(W \cap \psi^{-1}(U)))$$

est ouvert dans V.

2) On a $\psi = \Phi^{-1} \circ \psi_1$. Comme Φ et ψ_1 sont des homéomorphismes, ψ est un homéomorphisme sur son image.

Corollaire. *Soient V une sous-variété de dimension m, U un ouvert rencontrant V et $\Phi : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C^k. Si $\varphi = \Phi|V \cap U$ est une bijection de $V \cap U$ sur un ouvert W et si l'inverse ψ est de classe C^k, alors φ est une carte.*

Démonstration. Il suffit de montrer que ψ est une immersion : on a $\Phi \circ \psi = \mathrm{Id}_{V_1}$, donc $D\Phi \circ D\psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}$, donc $D\psi$ est partout injective.

Propriété. Si $\psi : W \to V$ est un paramétrage en x, toute application $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \psi(W)$ est de la forme $f = F \circ \psi$ où $F = f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to W$ a la même différentiabilité que f.

Exemple fondamental. Si $\Phi : (U, V \cap U) \to (U', F \cap U')$ est un redressement local en x, $\psi = \Phi^{-1}|F \cap U'$ est un paramétrage de V en x, d'image $V \cap U$. Donc $\varphi = \Phi|V \cap U$ est une carte de V en x.

Projection stéréographique. Soit E un espace euclidien de dimension finie, et soit S la sphère unité de centre 0. Si $x \in S$, on définit $p_x : S \setminus \{x\} \to x^\perp$ telle que $p(y)$ est l'unique point $z \in x^\perp$ avec x, y, z alignés.

En formules : $z = x + \lambda(y - x)$, avec $(z, x) = 0$ soit $1 + \lambda((x, y) - 1) = 0$, $\lambda = \dfrac{1}{1 - (x, y)}$. Autrement dit :

$$p_x(y) = x + \frac{y - x}{1 - (x, y)} = \frac{y - (x, y)x}{1 - (x, y)}.$$

Alors p_x est une bijection, de réciproque $p_x^{-1}(z) = y = x + \mu(z - x)$, avec $||y||^2 = 1$ et $y \neq x$, soit $(1 - \mu)^2 + \mu^2||z||^2 - = 0$ et $\mu \neq 0$, d'où $\mu = \dfrac{2}{1 + ||z||^2}$ et

$$p_x^{-1}(z) = x + \frac{2(z - x)}{1 + ||z||^2} = \frac{2z + (||z||^2 - 1)x}{1 + ||z||^2}.$$

D'après le corollaire ci-dessus, p_x est une carte. Noter que S est recouverte par deux domaines de cartes.

Exercice. Montrer que p_x préserve les angles, plus précisément :

$$(Dp_x^{-1}(z)(v), Dp_x^{-1}(z)(v)) = C(z)(v, v').$$

Donc si x et x' sont deux points de S, l'application $p_x \circ p_{x'}^{-1}$, qui est un difféomorphisme de ${x'}^\perp \setminus \{p_{x'}(x)\}$ sur $x^\perp \setminus \{p_x(x')\}$, est **conforme**, c'est-à-dire sa différentielle est une similitude. En particulier, si $x' = -x$ on a $p_x \circ p_{x'}^{-1} = \dfrac{z}{||z||^2}$, inversion par rapport à la sphère unité de $x^\perp$.

Si $n = 3$ et l'on identifie $E = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, on a $p_x \circ p_{-x}^{-1}(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$, et en général $p_x \circ p_{x'}^{-1}(z) = \dfrac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}$.. Noter que si U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ est une immersion, f est conforme si et seulement si f est holomorphe ou anti-holomorphe (cf le cours d'Analyse complexe).

3. Espace tangent à une sous-variété

Cône tangent. Soit $A \subset E$ une partie d'un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $x \in A$ un point non isolé. Le **cône tangent à** A **en** a est l'ensemble des limites $\lim \lambda_n(x_n - x)$, où (x_n) est une suite dans $A \setminus \{x\}$ convergeant vers 0 et λ_n tend vers 0 par valeurs ≥ 0. On le notera CT_xA.

Exemples. (i) Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 - x^2 + y^2 = 0\}$ et $p_0 = (0,0)$ (point double ordinaire), $CT_{p_0}A = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$.

(ii) Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\} = \{(t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $p_0 = (0,0)$ (point de rebroussement), $CT_{p_0}A = \mathbb{R}_+ \times \{0\}$.

(iii) Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^3\}$ et $p_0 = (0,0)$, $CT_{p_0}A = \mathbb{C} \times \{0\}$.

Remarque. (exercice) Le cône tangent en x est le cône sur K_xA = ensemble des limites de suites $\dfrac{x_n - x}{||x_n - x||}$, $x_n \in A \setminus \{x\}$, $x_n \to x$. Comme $\dfrac{x_n - x}{||x_n - x||}$ est dans la sphère unité qui est compacte, K_xA est un compact non vide.

Proposition-définition. *Soit $V \subset E$ une sous-variété de dimension m. Si $x \in V$, le cône tangent CT_xV est un sous-espace vectoriel de dimension m de E. On l'appelle* **espace tangent** *de V en x et on le note T_xV.*

Démonstration. Soit $f : W \subset \mathbb{R}^m \to V$, $m = \dim(V)$ un paramétrage en x. Une suite $(x_k \in V \setminus \{x\})$ convergeant vers x peut être supposée à valeurs dans $f(W)$, donc de la forme $(f(w_k))$ où w_k tend vers 0 dans $\mathbb{R}^m$. Donc

$$x_k - x = f(w_k) - f(0) = Df(0)(w_k, 0) + o(||w_k||).$$

Comme $Df(0)$ est injectif et qu'on est en dimension finie, le terme $o(||x_k||)$ est négligeable devant $Df(0)(w_k, 0)$. Donc $\lambda_k(x_k - x)$ converge si et seulement si $\lambda_k w_k$ converge vers un vecteur $w \in \mathbb{R}^m$, et alors $\lambda_k(x_k - x) \to Df(0)(w)$. Comme w peut être quelconque, l'ensemble des limites possibles est im $Df(0)$, ce qui prouve la proposition.

Proposition. *Soit x un point d'une sous-variété V de E.*

(i) Soit $\psi : W \to V$ un paramétrage tel que $\psi(w) = x$. Alors $T_xV = \operatorname{im} Df(w)$.

(ii) L'espace tangent T_xV est «l'ensemble des vecteurs tangents en x aux courbes dans V passant par x». Formellement :

$$T_xV = \{\gamma'(0) \mid \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V \text{ , de classe } C^1 \text{ , } \gamma(0) = x\}.$$

(on peut remplacer «de classe C^1» par «différentiable» , ou par «de classe C^∞» ; et aussi se limiter aux chemins dans un voisinage $V \cap U$)

(iii) Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$, $q = \operatorname{codim}(V)$, une submersion de classe C^k définie sur un voisinage de x et telle que $s^{-1}(0) = V \cap U$. Alors $T_xV = \ker Ds(x)$.

Démonstration. (i) Cela résulte de la preuve de la proposition précédente.

(ii) Soit $\Phi : (U, V \cap U) \to (U', F \cap U')$ un difféomorphisme de redressement. Un chemin $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V \cap U$, $\gamma(0) = x$, est de la forme $\Phi^{-1} \circ c$ où c est à valeurs dans $F \cap U'$ et $c(0) = \Phi(x)$.

On a alors $c'(0) \in F$, et $c'(0)$ peut être n'importe quel élément de F. Donc l'ensemble des valeurs prises par $\gamma'(0)$ est $D\Phi(x)^{-1}(F)$. Comme $f = \Phi^{-1}|F \cap U'$ est un paramétrage de V en x, (ii) résulte de (i).

(iii) Quitte à diminuer U, on a $s = Ds(x) \circ \varphi$ où φ est un difféomorphisme $U \to U'$ tel que $D\varphi(x) = \mathrm{Id}_E$. Alors $\psi = \varphi^{-1}|\ker Ds(x) \cap U'$ est un paramétrage de V en x, tel que $D\psi(\psi^{-1}(x)) = D\psi(\varphi(x)) = \mathrm{Id}_{\ker Ds(x)}$, donc $T_xV = \ker Ds(x)$.

4. Propriété de graphe local

Définition. Soit V une sous-variété de E. Un **sous-espace normal à V en x** est un supplémentaire de T_xV.

Exemple. Si E est un espace vectoriel euclidien, on peut prendre $N = T_xV^{\perp}$, noté N_xV.

Le théorème suivant donne une description locale d'une sous-variété comme graphe sur l'espace tangent à valeurs dans un sous-espace normal.

Théorème. *Soit $V \subset E$ une sous-variété de classe C^k. Soit $N \subset E$ un sous-espace normal en x. Alors il existe un ouvert $U \subset E$ contenant x, un ouvert $W \subset T_xV$ contenant 0, et une application $h : W \to N$ de classe C^k, tels que $h(0) = 0, Dh(0) = 0$ et*

$$V \cap U = \{x + v + h(v) \mid v \in W\}.$$

Démonstration. Notons $p_T : E \to T_xV$ la projection parallèle à N. Soit $\psi : W \subset T_xV \to V$ un paramétrage d'image $V \cap U$ en x, tel que $\psi(0) = x$ et $D\psi(0)$ est l'inclusion $i_T : T_xV$ dans E. Posons $g = p_T \circ (\psi - x) : W \to T_xV$. Alors g est de classe C^k et $g(0) = 0$, $Dg(0) = p_T \circ i_T = \mathrm{Id}_{T_xV}$. Donc, quitte à diminuer W, g est un C^k-difféomorphisme de W sur W'.

En remplaçant ψ par $\psi \circ g^{-1}$, on se ramène au cas où $g = \mathrm{Id}_W$. Posons $h = \psi - \mathrm{Id}_W - x$, de sorte que h est de classe C^k, à valeurs dans N et $\psi = x + \mathrm{Id}_W + h$. On a

$$V \cap U = \psi(W) = \{x + v + h(v) \mid v \in W\}.$$

Enfin, $h(0) = \psi(0) - x = 0$ et $Dh(0) = D\psi(0) - i_V = 0$, ce qui achève la preuve.

4. Calcul différentiel sur des sous-variétés.

1. Fonctions différentiables sur une sous-variété

Proposition. *Soit V une sous-variété et soient $\psi : (W, w) \to (V, x)$ et $\psi' : (W', w') \to (V, x)$ deux paramétrages. Alors, quitte à diminuer W et W', il existe un difféomorphisme $\varphi : W \to W'$ tel que $\psi' = \psi \circ \varphi$.*

Démonstration. Quitte à diminuer W et W', on peut supposer que $\psi(W) = \psi(W') = V \cap U$, où U est un voisinage muni d'un difféomorphisme de redressement $\Phi : (U, V \cap U, x) \to (\Phi(U), \mathbb{R}^m \cap \Phi(U))$. Alors $\Phi \circ \psi$ et $\Phi \circ \psi'$ sont des immersions injectives équidimensionnelles, donc des difféomorphismes. De plus, ils ont la même image $\mathbb{R}^m \cap \Phi(U)$, donc il existe un difféomorphisme φ tel que $\Phi \circ \psi' = (\Phi \circ \psi) \circ \varphi$, soit $\psi' = \psi \circ \varphi$ puisque Φ est injectif.

Définitions. Soient $V \subset E$ une sous-variété de classe C^k, $f : V \to G$ une application à valeurs dans un espace vectoriel normé, et x un point de V. On dit que f est différentiable en x s'il existe un paramétrage $\psi : (W, w) \to (V, x)$ tel que $f \circ \psi$ est différentiable en w. D'après la proposition ci-dessus c'est alors vrai pour tout paramétrage.

On définit de façon analogue la notion d'application de classe C^ℓ, $1 \leq \ell \leq k$.

Remarque. Si F est une application différentiable, resp. C^ℓ, définie sur un voisinage de V, la restriction $f = F|V$ est différentiable, resp. C^ℓ. Réciproquement, pour toute fonction différentiable f sur V et tout $x \in V$ il existe F définie sur un voisinage U de x, différentiable et telle que $F|V \cap U = f$ (exercice). En fait on peut trouver F sur tout un voisinage de V (plus difficile : il faut des partitions de l'unité).

Proposition. *Soient V une sous-variété et $f : V \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Soit $g : U \subset \mathbb{R}^p \to V$ une application différentiable. Alors $f \circ g$ est différentiable. Si f et g sont de classe C^ℓ (au plus égal à la classe de différentiabilité de V), $f \circ g$ est de classe C^k.*

Démonstration. Si $x \in g(U)$, soit $\psi : (W, w) \to (V, x)$ un paramétrage. La proposition résulte de
$$f \circ g = (f \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ g).$$

Définition. Soit $f : V \to G$ une application différentiable, et soit $x \in V$. Si $v \in T_xV$, soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V$ un chemin tel que $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v$. On pose
$$Df(x)(v) = (f \circ \gamma)'(0).$$
S $\psi : (W, w) \to (V, x)$ est un paramétrage, on a
$$(f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \psi)'(w).(D\psi(w)^{-1}.\gamma'(0)),$$
donc ceci ne dépend pas de γ. On appelle $Df(x)$ **différentielle de** f **en** x, ou **application tangente à** f **en** x. C'est une application linéaire de T_xV dans G. Autres notations : Df_x, T_xf.

Remarques. 1) Si V est un ouvert de E (sous-variété de codimension 0), on a $T_xV = E$ et cette définition coïncide avec la définition usuelle.

2) Si $f = F|V$ où F est une fonction différentiable définie sur un voisinage de V, $Df(x)$ est la restriction de $DF(x)$ à T_xV.

3) Si $\psi : (W, w) \to (V, x)$ est un paramétrage, l'application linéaire $Df(x)$ est ccaractérisée par la propriété :
$$f(\psi(w + h)) = f(x) + Df(x).(D\psi(w).h) + o(||h||).$$

2. Applications différentiables entre sous-variétés

Proposition. *Soient $V \subset E$, $V' \subset E'$ deux sous-variétés, et soit f une application de V dans V'. On suppose que f, vue comme application de V dans E', est différentiable en x. Alors $Df(x)$ envoie T_xV dans $T_{f(x)}V'$.*

Démonstration. Si $v \in T_xV$, on l'écrit sous la forme $v = \gamma'(0)$ avec $\gamma(0) = x$. Alors

$$Df(x)(v) = Df(x)(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0) \in T_{f(x)}V'.$$

Propriétés. *(i) Soit $f : V \to G$ différentiable en x. Si $\psi : (W, w) \to (V, x)$ est un paramétrage, on a*

$$D(f \circ \psi)(x) = Df(x) \circ D\psi(w).$$

(ii) Soient $V \subset E$ et $V' \subset E'$ deux sous-variétés. Si $f : V \to V'$ est différentiable en x et $g : V' \to G$ est différentiable en $f(x)$, alors $g \circ f : V \to G$ est différentiable en x et $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$.

Démonstration. (i) Si $v \in \mathbb{R}^m$, on pose $\gamma(t) = \psi(w + v)$, alors

$$Df(x)(D\psi(w)(v)) = Df(x)(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0) = D(f \circ \psi)(w)(v).$$

(ii) Soient $\psi : (W, w) \to (V, x)$ et $\psi' : (W', w') \to (V', f(x))$ des paramétrages. La différentiabilité résulte de

$$(g \circ f) \circ \psi = (g \circ \psi') \circ (\psi'^{-1} \circ (f \circ \psi)).$$

La formule pour la différentielle résulte de (i) et des formules habituelles pour les applications différentiables entre ouverts.

Définitions. Soient $V \subset E$ et $V' \subset E'$ deux sous-variétés. Une application $f : V \to V'$ entre deux sous-variétés de classe C^k est un **C^k-difféomorphisme** si c'est un homéomorphisme et si f et f^{-1} sont de classe C^k. S'il existe un C^k-difféomorphisme entre V et V', on dit qu'elles sont C^k-difféomorphes.

Remarque. Cette définition étend la précédente définition de difféomorphisme entre sous-variétés, qui supposait E et E' de même dimension.

Exercice. Montrer que le tore $S^1(r) \times S^1(r') \subset \mathbb{R}^4$ est difféomorphe au tore de révolution engendré par un cercle dans le plan des (x, z) évitant l'axe des z.

Le fait que $D(f \circ g) = Df \circ Dg$ implique la

Propriété. Si $f : V \to V'$ est un C^k-difféomorphisme, $Df(x) : T_xV \to T_{f(x)}V'$ est un isomorphisme pour tout $x \in V$, donc $\dim V = \dim V'$.

Proposition. *Soit $f : V \to V'$ une application entre deux sous-variétés de classe C^k. On suppose que f est un homéomorphisme de classe C^k et que $Df(x) : T_xV \to T_{f(x)}V$ est partout un isomorphisme. Alors f est un C^k-difféomorphisme.*

Démonstration. Soit $x \in V$ et soit $\psi' : (W', w') \to (V' \cap U', y)$ un paramétrage de classe C^k, il s'agit de prouver que $f^{-1} \circ \psi'$ est de classe C^k en $f(x) = y$. Soit $\psi : (W, w) \to (V \cap U, x)$un paramétrage de classe C^k, on peut supposer $f(V \cap U) = V' \cap U'$ puisque f est un homéomorphisme. Alors $g = \psi'^{-1} \circ f \circ \psi : W \to V$ est une immersion de classe C^k bijective, donc un difféomorphisme. Donc $f^{-1} \circ \psi' = \psi \circ g^{-1}$ est de classe C^k.

La proposition suivante, de démonstration immédiate, montre que pour classer à difféomorphisme près les sous-variétés, on peut se limiter aux sous-variétés connexes.

Proposition. *Soient V et V' des sous-variétés de classe C^k. On suppose qu'elles ont le même nombre (peut-être infini) de composantes connexes, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble I et des familles d'ouverts $U_i \subset V$, $U_i' \subset V'$, tels que les composantes de V soient les U_i et celles de V' soient les U_i'.*

Si $f : V \to V'$ est une application qui induit un C^k-difféomorphisme $U_i \to U_i'$ pour tout i, alors f est un C^k-difféomorphisme.

3. Classification des courbes à difféomorphisme près

Soit $C \subset E$ une courbe connexe de classe C^k dans un espace de dimension finie. On munit E d'une norme euclidienne.

Paramétrage par longueur d'arc. Un **paramétrage par longueur d'arc** de C est une application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to C$ de classe C^1 et telle que $||\gamma'(t)|| \equiv 1$. C'est une immersion équidimensionnelle, donc c'est bien un paramétrage au sens précédemment défini.

Soit γ un paramétrage par longueur d'arc. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\gamma(t+a)$ est un paramétrage par longueur d'arc ainsi que $\gamma(-t+a)$.

Proposition 1. *On suppose C de classe C^k. Tout point $x \in C$ admet un paramétrage par longueur d'arc γ de classe C^k tel que $\gamma(0) = x$. Si $v \in T_xC$ est donné tel que $||v|| = 1$, on peut imposer $\gamma'(0) = v$.*

Démonstration. (i) Soit $\psi : (]-\varepsilon, \varepsilon[, 0) \to (C, 0)$ un paramétrage C^k quelconque. Posons $S(t) = \displaystyle\int_0^t ||\psi'(u)||du$. Alors S est de classe C^k et $S'(t) = ||\psi'(t)|| > 0$ donc S est un difféomorphisme de $(]-\varepsilon, \varepsilon[, 0)$ sur $(I, 0)$. Posant $\gamma = \psi \circ S^{-1}$, γ est un paramétrage C^k en x, et l'on a

$$\gamma'(t) = \frac{\psi'(S^{-1}(t))}{S'(S^{-1}(t))} = \frac{\psi'(S^{-1}(t))}{||\psi'(S^{-1}(t))||}$$

donc $||\gamma'(t)|| \equiv 1$. Enfin, si $v \in T_xC$ est de norme 1, on a $\gamma'(0) = \pm v$. Si le signe n'est pas le bon, il suffit de remplacer γ par $\gamma_1(t) = \gamma(-t)$, ce qui achève de prouver (i).

Proposition 2. *Soit $\gamma : I \to V$ une application différentiable telle que $||\gamma'(t)|| \equiv 1$, alors γ est de classe C^k donc est un paramétrage par longueur d'arc. Donc tout paramétrage par longueur d'arc est de classe C^k.*

Démonstration. Soit t_0 un point de I, on sait qu'il existe un paramétrage γ_0 par longueur d'arc, de classe C^k, tel que $\gamma_0(0) = \gamma(t_0)$. Quitte à diminuer I et I_0, on peut supposer que $\gamma_(I) \subset \gamma_0(I)$ et que γ_0 est un difféomorphisme sur son image. Alors $\varphi = \gamma_0^{-1} \circ \gamma$ est différentiable et $\gamma = \gamma_0 \circ \varphi$ donc $\gamma'(t) = \gamma_0'(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Puisque $\gamma'(t) = \gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)$ et $||\gamma'(t)|| = 1 = ||\gamma_0'(\varphi(t))||$, on a $|\varphi'(t)| \equiv 1$. Comme une fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, φ' est constant, soit $\gamma(t) \equiv \gamma_0(\varepsilon(t - t_0))$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, d'où le résultat.

Proposition 3. (ii) *Si $\gamma_1 : I_1 \to C$ et $\gamma_2 : I_2$ sont deux paramétrages par longueur d'arc tels que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\gamma_(t_1 + t) = \gamma_2(t_2 + \varepsilon t)$ quand les deux membres sont définis.*

Démonstration. Quitte à remplacer $\gamma 1(t)$ par $\gamma_2(t)$ par $\gamma_2(2t_2 - t)$, on peut supposer que I_1 et I_2 contiennent 0 et que $\gamma_1'(t_1) = \gamma_2'(t_2)$.

On veut montrer que $\gamma_1(t_1+t) = \gamma_2(t_2+t)$ sur $]-a,b[= (I_1-t_1)\cap(I_2-t_2)$. Soit A l'ensemble des $t \in [0,b[$ tels que $\gamma_1(t_1+t) = \gamma_2(t_2+t)$ sur $[0,t]$, la preuve de la proposition 2 montre que si $T \in A$ avec $T < b$, il existe $h > 0$ tel que $T + h \in A$. Donc $\sup(A) = b$, et de même $\inf(A) = -a$, ce qui achève la preuve.

Théorème. *Soit $C \subset E$ une courbe connexe de classe C^k, $k \geq 1$. Alors C est C^k-difféomorphe à $\mathbb{R}$ ou au cercle $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, identifié à $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$.*

Démonstration. Fixons $x \in C$ et $v \in T_xC$ de longueur 1. Considérons tous les paramétrages par longueur d'arc $\gamma : (I,0) \to (C,x)$ tels que $\gamma'(0) = v$. Par la proposition 3, il existe un tel paramétrage $\gamma : (I,0) \to (C,x)$ qui est maximal. Son image $C(x)$ est ouverte dans C, et ne dépend que de x et non de v puisque $\gamma(-t)$ est le paramétrage maximal associé à $-v$.

La proposition 3 implique que les $C(x)$, $x \in C$, sont disjoints ou coïncident. Comme il forment un recouvrement ouvert de C et que C est connexe, ils sont tous égaux à C donc γ est surjectif.

Pour finir la preuve, nous allons distinguer deux cas suivant que γ est injectif ou non.

1) Si γ est injectif, c'est un plongement et il est bijectif, donc c'est un C^k-difféomorphisme de I sur C. Comme I est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{R}$, le théorème est prouvé dans ce cas.

2) Si γ n'est pas injectif soit $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ avec $t_1 < t_2$, on peut supposer que $t_1 = 0$ en considérant $\gamma(t - t_1)$. Soit alors T la borne inférieure des $t > 0$ tels que $\gamma(t) = x$, on a $\gamma(T) = x$ et $T > 0$ car γ est localement injectif.

Puisque $\gamma(T) = \gamma(0)$, on a $\gamma(t) \equiv \gamma(T \pm t)$, et par minimalité de T le signe est $+$. Donc $\gamma(t) \equiv \gamma(t+T)$, ce qui prouve que γ est défini sur $\mathbb{R}$, T-périodique, T étant la période minimale de γ.

L'application γ induit un plongement topologique $\overline{\gamma}$ de $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ dans C. Son image est ouverte et compact donc fermée, donc par connexité elle est surjective, donc c'est un homéomorphisme. De façon équivalente, on a un homéomorphisme $c : \mathbb{U} \to C$ tel que

$$c(e^{it}) = \gamma(\frac{Tt}{2\pi})\ ,\ c^{-1}(\gamma(t)) = \exp(\frac{2\pi it}{T}).$$

Or la restriction de c (resp γ) à un intervalle de longueur $< 2\pi$ (resp $< T$) est un C^∞-paramétrage de $\mathbb{U}$ (resp C^k-paramétrage de C), donc ces identités prouvent que c est un C^k-difféomorphisme. Ceci achève la preuve du théorème.

4. Points critiques d'une fonction sur une sous-variété

Définition. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur une sous-variété $V \subset E$. Un point $x \in V$ est dit **critique** pour f si $Df(x) = 0$.

Cas où f est la restriction d'une fonction ambiante. Supposons $f = F|V$ où F est une fonction différentiable définie sur un voisinage U de V. Alors $x \in V$ est un point critique de f ssi $DF(x)$ s'annule sur T_xV. En particulier, si $V = g^{-1}(c)$ où $g : U \to \mathbb{R}^q$ est une submersion, la condition devient $DF(x)|\ker Dg(x) = 0$, c'est-à-dire qu'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ telle que

$$DF(x) = L \circ Df(x).$$

Si $q = 1$ c'est-à-dire que V est une hypersurface, L est unique et est la multiplication par un scalaire λ, appelé **multiplicateur de Lagrange** :

$$x \in \mathrm{crit}(F|g^{-1}(c)) \Leftrightarrow (\exists\lambda \in \mathbb{R})\ DF(x) = \lambda Dg(x).$$

Si $E = \mathbb{R}^n$, on a donc

$$x \in \mathrm{crit}(F|g^{-1}(c)) \Leftrightarrow (\exists \lambda)\ (\forall i)\ \frac{\partial F}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Extrémas. Si f est une fonction différentiable sur une sous-variété V et si $x \in V$ est un extrémum local, alors $Df(x) = 0$. En effet, si $\psi : (W, w) \to (V, x)$ est un paramétrage, w est un extrémum local de $f \circ \psi$, donc

$$D(f \circ \psi)(x) = 0 = Df(x) \circ D\psi(w).$$

Comme $D\psi(w)$ a pour image T_xV, ceci implique $Df(x) = 0$.

Etude plus fine d'un point critique. Supposons que V est de classe C^2, et que x est un point critique de $f : V \to \mathbb{R}$ est de classe C^2. On définit alors la **hessienne** de f en x, qui est une forme quadratique sur T_xV, de la façon suivante. Si $\psi : (W, w) \to (V, x)$ est un paramétrage, on pose, pour $v_1, v_2 \in T_xV$:

$$(*) \qquad \mathrm{Hess} f(x)(v) = D^2(f \circ \psi)(w).(D\psi(w)^{-1}.v, D\psi(w)^{-1}.v).$$

Ceci est indépendant de ψ, car si $\psi' : (W', w') \to (V, x)$ est un autre paramétrage, quitte à diminuer les domaines on a $\psi' = \psi \circ \varphi$ où φ est un difféomorphisme. Donc $D(f \circ \psi').v = (D(f \circ \psi) \circ D\varphi).v$, d'où, si $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$:

$$D^2(f \circ \psi')(w').(v_1, v_2) = D^2(f \circ \psi)(w).(D\varphi(v_1), D\varphi(v_2)) + D(f \circ \psi)(w).(D^2\varphi(w).(v_1, v_2))$$

Puisque x est un point critique, le second terme est nul. Si l'on remplace $v_i \in \mathbb{R}^m$ par $D\psi'(w')^{-1}.v_i$, $v_i \in T_xV$, $D\varphi(v_i)$ devient $D\psi(w)^{-1}.v_i$, d'où

$$D^2(f \circ \psi')(w').(D\psi(w')^{-1}.v_1, D\psi(w')^{-1}.v_2) = D^2(f \circ \psi)(w).(D\psi(w)^{-1}.v_1, D\psi(w)^{-1}.v_2).$$

Donc la définition $(*)$ est licite.

Par la formule de Taylor, on a donc

$$(**) \qquad f(\psi(w + h)) = f(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Hess} f(x)(D\psi(w).h) + o(||h||^2).$$

Rappelons que si q est une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E de dimension finie m, il existe une base dans laquelle

$$q(\sum x_j e_j) = \sum_{j=1}^{i_-} -x_j^2 + \sum_{i=i_-+1}^{i_-+i_+} x_j^2$$

Le nombre r$=i_- + i_+$ est le rang de q, le nombre i_- est son **indice**. Si $r = \dim(E)$, q est non dégénérée.

Comme dans le cas d'une fonction sur un ouvert de E, la formule $(**)$ montre que

- si x est un minimum (resp. un maximum) local, $\mathrm{Hess} f(x)$ est positive ou nulle (resp. négative ou nulle)
- si $\mathrm{Hess} f(x)$ est définie positive (resp. définie négative), x est un minimum local strict (resp. un maximum local strict).

Définitions. Soit x un point critique d'une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Son **indice** est celui de sa hessienne. On dit que c'est un point critique non dégénéré (ou : **de Morse**) si celle-ci est non dégénérée). Si tous les points critiques de f sont de Morse, on dit que f est une fonction de Morse.

Nous démontrerons plus tard le

Lemme de Morse. *Soit x un point critique non dégénéré d'une fonction f de classe C^k, $k \geq 3$, sur une sous-variété V de dimension m. Alors il existe un paramétrage $\psi : (W \subset \mathbb{R}^m, 0) \to (V, x)$, de classe C^{k-2} tel que*

$$f \circ \psi(x_1, \cdots, x_m) = -\sum_{j=1}^{i} x_i^2 + \sum_{j=i+1}^{m} x_j^2 \ , \ i = \text{ind Hess} f(x).$$

Exercices. (i) Soit $V = S(0, r) \subset \mathbb{R}^n$ (espace euclidien), et soit $f = x_n | V$ (fonction hauteur). Montrer qu'elle a deux points critiques non dégénérés : un maximum strict et un minimum strict.

Remarque. On peut montrer que si V est une sous-variété compacte et $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 non constante ayant exactement deux points critiques (nécessairement le maximum et le minimum), alors V est homéomorphe à une sphère.

(ii) Soit $V = T(a, r)$ le tore de révolution engendré par la rotation du cercle de centre $(a, 0, 0)$ et de rayon r autour de l'axe des z. Soit $f = x | V$, trouver ses points critiques, montrer qu'ils sont de Morse. Quels sont leurs indices ?

La fonction hauteur $z | V$ est-elle de Morse ?

5. Équations différentielles autonomes de dimension un.
Lemme de comparaison, unicité. Équations différentielles linéaires

1. Équations différentielles autonomes en dimension un

Nous étudions l'équation $(x' = X(x))$ où X est une fonction continue d'un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (la notation X est adoptée pour faire penser à un champ de vecteurs). Il suffit d'étudier les solutions avec condition initiale $x(0) = x_0 \in J$ donnée.

1) Cas où X ne s'annule pas sur J.

Proposition 1. *Soit $X : J \subset \mathbb{R}$ une fonction continue ne s'annulant pas. Si $x_0 \in J$, l'équation différentielle $(x' = X(x))$ a une unique solution définie au voisinage de 0 telle que $x(0) = x_0$. Le domaine maximal de définition de cette solution est $I =]-a, b[= \psi_{x_0}(J)$, où*

$$\psi_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dr}{X(r)}.$$

De plus, ψ_{x_0} est un difféomorphisme de J sur son image et la solution est

$$x(t) = \psi_{x_0}^{-1}(t).$$

Démonstration. Si $x : I \to J$ est une fonction différentiable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0, telle que $x(0) = x_0$, alors

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \Leftrightarrow dt = \frac{dx}{X(x)} \Leftrightarrow t = \int_{x_0}^{x} \frac{dr}{X(r)}.$$

Plus formellement : si $\dfrac{d\varphi}{dt} = X(\varphi(t)))$, φ est un C^1-difféomorphisme de J sur un intervalle I_1 contenant x_0. Le difféomorphisme inverse $\varphi^{-1} = \psi$ vérifie $\psi(x_0) = 0$ et

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{X(x)},$$

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dr}{X(r)} = \psi_{x_0}(x),$$

I est contenu dans $\psi_{x_0}(I)$, et $x = \psi_{x_0}^{-1}$ sur . Réciproquement, ψ_{x_0} est un difféomorphisme de J sur $\psi_{x_0}(J)$, intervalle contenant 0, et clairement $x(t) := \psi_{x_0}^{-1}(t)$ est solution de $(x' = X(x))$ sur $\psi_{x_0}(J)$. Ceci prouve la proposition.

Cas particulier. Si $I =]a, b[$, une (ou toute) solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\Big| \int_{x_0}^{b} \frac{dx}{X(x)} \Big| = \infty = \Big| \int_{a}^{x_0} \frac{dx}{X(x)} \Big|.$$

Exemple. Si $|X(x)| \leq C(|x| + 1)$ (croissance linéaire), les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$.

2) Cas où X peut s'annuler. On peut alors avoir des solutions non uniques à condition initiale donnée. Exemple :

$$X(x) = \begin{cases} x^{1-\varepsilon} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Alors les solutions ayant la valeur 0 en 0 sont

$$x_a(t) = \begin{cases} [\varepsilon(t-a)]^{1/\varepsilon} & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a. \end{cases}$$

Proposition 2. *Soit $X : J \to \mathbb{R}$ une application continue qui est localement Lipschitz au voisinage de $X^{-1}(0)$. Si x est une solution de $(x' = X(x))$ telle que $x' = X(x)$ s'annule en un point, x est constante. Donc toute solution non constante reste dans un intervalle J_1 (composante de $X^{-1}(\mathbb{R}^*)$ où X ne s'annule jamais, et l'on peut appliquer la proposition 1.*

Démonstration. Si $x : I \to \mathbb{R}$ est une solution telle que x' s'annule en un point mais pas partout, on peut supposer que $x(0) = 0$ et (quitte à remplacer $X(x)$, $x(t)$ par $-X(x)$, $x(-t)$) qu'il existe $t > 0$ tel que $x(t) = 0$. Soit t_0 la borne inférieure des $t > 0$ tels que $X(x(t)) = 0$. Comme $x'(0) = X(x(0))$ est non nul, on a $t_0 > 0$, de plus $X(x(t_0)) = 0$. De plus, $X(x(t)) \neq 0$ sur $[0, t_0[$, donc la proposition 1 dit que

$$t = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dr}{X(r)}$$

pour tout $t \in [0, t_0[$. Passant à la limite, il vient

$$t_0 = \int_{x(0)}^{x(t_0)} \frac{dr}{X(r)}.$$

Donc l'intégrale de droite, où $X(r)$ a un signe constant, est absolument convergente. Or $X(x(t_0)) = 0$ donc l'hypothèse localement Lipschitz dit que $|X(r)| \leq C(x(t_0) - r)$, d'où

$$\int_{x(0)}^{x(t_0)} \frac{dr}{C|x(t_0) - r|} \leq \int_{x(0)}^{x(t_0)} \frac{dr}{X(r)} < \infty,$$

ce qui est absurde.

Remarque. Cet argument s'applique à tout module de continuité $m(\varepsilon)$ tel que

$$\int_0^1 \frac{dr}{m(r)} = \infty.$$

2. Comparaison de solutions d'équations différentielles

Le lemme suivant est une variante (plus naturelle me semble-t-il) du lemme de Gronwall :

Lemme de comparaison. *Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, $Y : J \to \mathbb{R}$ une application localement Lipschitz, $y : I \to J$ une solution de $y' = Y(y)$, et t_0 un point de I.*

(i) Soit $x : I \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$x(t_0) \leq y(t_0) \ , \ x'(t) \leq Y(x(t)).$$

Alors $x(t) \leq y(t)$ sur $[t_0, +\infty[\cap I$.

On a la même conclusion si l'on remplace l'hypothèse $x'(t) \leq Y(x(t))$ par

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \leq Y(x(t)).$$

(ii) Soit $x : I \to E$ où E est un espace vectoriel normé, vérifiant

$$||x(t_0)|| \leq y(t_0)\ ,\ ||x'(t)|| \leq \mathrm{sgn}(t-t_0)\ Y(||x(t)||).$$

Alors $||x(t)|| \leq y(t)$ sur I.

(iii) **Croissance au plus exponentielle.** *Soit $x : I \to E$ différentiable. Alors*

$$||x'|| \leq C||x|| \Rightarrow ||x(t)|| \leq e^{C|t-t_0|}||x(t_0)|| \text{ sur } I.$$

Démonstration. (i) Si ce n'est pas vrai, soit $t_1 \in [t_0, +\infty[\cap I$ le sup des $t > t_0$ tels que ce soit vrai sur $[t_0, t]$. Alors t_1 est un max donc $t_1 \in I$, et $x(t_1) = y(t_1)$.

Soit $t_2 > t_1$ assez petit pour avoir $L(t_2 - t_1) < \frac{1}{2}$ où L est la constante de Lipschitz de Y sur $[t_1, t_2]$. Soit $\varepsilon > 0$, nous allons montrer que $x(t) \leq y(t) + \varepsilon(t - t_0)$ sur $[t_1, t_2]$. Si n'est pas vrai, il existe $t_3 \in [t_1, t_2[$ maximal tel que ce soit vrai sur $[t_1, t_3]$, donc $x(t_3) - y(t_3) = \varepsilon(t_3 - t_1)$. Si $h > 0$, on a

$$\begin{aligned}
x(t_3+h) &= x(t_3) + x'(t_3)h + o(h)\\
&\leq y(t_3) + \varepsilon(t_3-t_1) + Y(x(t_3))h + o(h)\\
&\leq y(t_3) + \varepsilon(t_3-t_1) + Y(y(t_3))h + L\varepsilon(t_3-t_1)h + o(h)\\
&\leq y(t_3) + y'(t_3)h + \varepsilon(t_3 - t_1 + \frac{h}{2}) + o(h)\\
&= y(t_3+h) + \varepsilon(t_3 - t_1 + \frac{h}{2}) + o(h).
\end{aligned}$$

Pour h assez petit, ceci est $\leq y(t_3+h) + \varepsilon(t_3 - t_1 + h)$, contredisant la maximalité de t_3.

Faisant tendre ε vers 0, on en déduit $x(t) \leq y(t)$ sur $[t_1, t_2]$, contredisant la maximalité de t_1.

La preuve ci-dessus reste clairement valable sous l'hypothèse plus faible, puisque celle-ci veut dire : pour tout $\varepsilon > 0$, on a $x(t+h) \leq x(t) + Y(x(t))h + \varepsilon h$ pour $h > 0$ assez petit.

(ii) En considérant $x(2t_0 - t)$, on voit qu'il sufit de le prouver sur $[t_0, +\infty[\cap I$. On a

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{||x(t+h)|| - ||x(t)||}{h} \leq \limsup_{h\to 0^+} \frac{||x(t+h)-x(t)||}{h} = ||x'(t)|| \leq Y(||x(t)||).$$

Donc on peut appliquer (i) à $||x||$, ce qui donne (ii).

(iii) Il suffit d'appliquer (ii) avec $y(t) = ||x(t_0)||e^{C(t-t_0)}$.

Remarques. 1) Le (iii) est conséquence immédiate du lemme de Gronwall.

2) En travaillant un peu plus, on peut étendre le résultat au cas où Y a un module de continuité $m(r)$ tel que

$$\int_0^1 \frac{dr}{m(r)} = \infty.$$

Corollaire. *Soit $X : U \subset \mathbb{R} \times E \to E$ un champ de vecteurs L-Lipschitz par rapport à la variable d'espace. Soient $x_1, x_2 : I \to E$ deux solutions de l'équation différentielle associée à X. Alors*

$$||x_1(t) - x_2(t)|| \leq e^{L|t-t_0|}||x_1(t_0) - x_2(t_0)||.$$

Démonstration. On a

$$||x'(t)|| = ||X(t, x_1(t)) - X(t, x_2(t))|| \leq L||x_1(t) - x_2(t)|| = L||x(t)||.$$

Donc on peut appliquer (iii) à $x = x_1 - x_2$, cqfd.

Remarque. Noter que ce corollaire implique l'unicité des solutions indépendamment du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice. On suppose $X(t,x) - X(t,y) \leq m(||x-y||)$ avec $\displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{m(r)} = \infty$. Montrer que deux solutions de $x' = X(t,x)$ qui coïncident en un point sont égales sur leur domaine commun, de définition.

3. Équations différentielles linéaires

Définitions. Soient E un espace vectoriel normé et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une **équation différentielle linéaire** est une équation de la forme

$$(*) \qquad x'(t) = A(t).x(t),$$

où $A : I \to \mathrm{L}(E)$ est continue. On dit que $X(t,x) = A(t).x$ est un *champ de vecteurs linéaire* dépendant du temps.

Équation linéaire avec second membre. C'est une équation de la forme

$$x'(t) = A(t).x(t) + B(t),$$

où B une application continue de I dans E.

Remarque. 1) On utilise aussi les expressions «linéaire homogène» et «linéaire».

2) Si $x' = A.X + B$, alors $(x,1) : I \to E \times \mathbb{R}$ est solution de l'équation linéaire $(x,1)' = (A.x + B.1, 0)$, et réciproquement : donc une équation linéaire avec second membre se ramèn a une équation linéaire homogène en rajoutant une variable d'espace. En pratique, ceci n'est utilie que si A dépend du temps, sinon mieux vaut utiliser la variation des constantes (voir plus loin).

Le principal résultat sur les équations différentielles linéaires est le

Théorème. *Pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times E$, l'équation différentielle linéaire $x' = A(t).x$ a une unique solution définie sur I tout entier.*

Démonstration. Il suffit de le prouver sur un sous-intervalle compact. On peut supposer $t_0 = 0$ et $I = [0,1]$. Une solution de l'équation avec la condition initiale donnée est une application continue $x : I \to E$ telle que $(\forall t \in I)$, $x(t) = x_0 + \int_0^t A(s).x(s)ds$.

Autrement dit, c'est une solution de $(\mathrm{d} - T)(x) = x_0$ si l'on définit l'opérateur $T : C^0(I,E) \to C^0(I,E)$

$$(Tx)(t) = \int_0^t A(s).x(s)ds.$$

Cet opérateur est clairement continu pour la norme $||.||_\infty$, de norme au plus $C = \max_{t\in I} ||A(t)||$. De plus, une récurrence immédiate donne

$$(T^n x)(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} A(t_1)\cdots A(t_n)x(t_n)\ dt_1 \cdots dt_n.$$

Le domaine d'intégration $0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n \le t$ a pour volume $\dfrac{t^n}{n!}$ (intégrale itérée n-ième de 1), donc $||T^n|| \le \dfrac{C^n}{n!}$. Si n est assez grand, ceci est < 1, donc, puisque $C^0(I,E)$ est un Banacah, $\mathrm{Id} - T^n$ est inversible, donc aussi $\mathrm{Id} - T$, cqfd.

Corollaire. *L'espace vectoriel S des solutions de l'équation linéaire $x' = A(t).x$ sur I est de dimension* $\dim(E)$*, plus précisément pour tout $t_0 \in I$ l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de S sur E.*

Corollaire : cas d'une équation d'ordre n. *L'espace vectoriel S des solutions de l'équation linéaire d'ordre n*

$$x^{(n)} = A(t).(x, x', \cdots, x^{(n-1)})$$

sur I est de dimension $\dim(E)^n$*, plus précisément pour tout $t_0 \in I$ l'application*

$$x \mapsto (x(t_0), x'(t_0), \cdots, x^{(n-1)}(t_0))$$

est un isomorphisme de S sur E.

Résolvante. Soit $x' = A(t).x$ une équation linéaire. Considérons l'équation

$$(\mathcal{R}) \qquad \frac{dR}{dt} = A(t) \circ R(t),$$

où l'inconnue R est une application de I dans $\mathcal{L}(E,E)$. Cette équation est encore linéaire, donc a des solutions définies sur I. La solution de $(\mathcal{R})$ de condition initiale $R(t_0) = \mathrm{Id}$ est appelée *résolvante*, et notée $R_A^{t_0,t} \in \mathcal{L}(E,E)$.

Propriété. *La solution de $(x' = A(t).x)$ de condition initiale $x(t_0) = x_0$ est $x(t) = R_A^{t_0,t}.x_0$. Autrement dit, on a $R_A^{t_0,t} = \varphi_X^{t_0,t}$ où $X(t,x) = A(t).x$.*

Démonstration. Notons $R(t) = R_A^{t_0,t}$. Alors

$$\frac{d}{dt}\Big(R(t).x_0\Big) = \Big(\frac{d}{dt}(R(t))\Big).x_0 = (A(t) \circ R(t).x_0 = A(t).(R(t).x_0),$$

donc $x(t) = R(t).x_0$ est solution de $x' = A(t).x$, et $x(t_0) = R(0).x_0 = x_0$, d'où le résultat.

La propriété de flot implique :

Corollaire. *L'endomorphisme $R_A^{t_0,t_1}$ est inversible, avec pour inverse $R_A^{t_1,t_0}$.*

Variation des constantes. L'équation avec second membre $(x' = Ax + B)$ se ramène à l'équation homogène en définissant $y(t) = R_A^{t,t_0}.y(t)$, d'où $x(t) = R_A^{t_0,t}.y(t)$. En effet, y satisfait l'équation

$$(A(t) \circ R_A^{t_0,t}).y(t) + R_A^{t_0,t}.y'(t) = A(t).(R_A^{t_0,t}.y(t)) + B(t)$$

soit

$$y'(t) = (R_A^{t_0,t})^{-1}.B(t) = R_A^{t,t_0}.B(t).$$

Donc $y(t)$ se trouve par intégration.

Cas où les $A(t)$ commutent. On a alors $R_A^{t_0,t} = \exp(\int_{t_0}^t A(s)\ ds)$. C'est vrai en particulier si $\dim(E) = 1$ ou si $A(t)$ est indépendant de t.

Exemple. Soit $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$, ou en identifiant $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$: $A(t).z = (a(t) + ib(t)).z$. Alors les $A(t)$ commutent, donc

$$R_A^{t_0,t_1} = \exp(A + iB) = \begin{pmatrix} A\cos B & -A\sin B \\ A\sin B & A\cos B \end{pmatrix},$$

où $A = \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt, B = \int_{t_0}^{t_1} b(t)dt$.

Remarque. On peut montrer que cette formule est fausse si les $A(t)$ ne commutent pas. Pour cela, on utilise la propriété $\exp(F)' = (F' + F'U - UF')\exp(F)$.

Exemple : soit $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$. L'équation différentielle associée

$$x' = x\ ,\ y' = tx,$$

a pour solution $x = e^t x_0, y = ((t-1)e^t + 1)x_0 + y_0$. Donc

$$R_A^{0,t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ (t-1)e^t + 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ \frac{t^2}{2}e^t & 1 \end{pmatrix} = \exp(\int_0^t A(s)ds).$$

Wronskien. En dérivant le déterminant de la résolvante $R = R_A^{t_0,t}$, on a

$$(\det R)' = \mathrm{tr}(R'^t\widetilde{R}) = \mathrm{tr}(AR^t\widetilde{R}) = \mathrm{tr}(A)\det(R),$$

donc

$$\det(R_A^{t_0,t}) = \exp(\int_{t_0}^t \mathrm{tr}(A(s)\ ds).$$

Si $x_1, \cdots, x_n$ sont $n = \dim(E)$ solutions de l'équation $x' = A(t)x$, leur **wronskien** est $W = \det(x_1, \cdots, x_n)$, fonction de t. On a

$$W(t) = \det(R_A^{t_0,t})\ W(t_0) = \exp(\int_{t_0}^t \mathrm{tr}(A(s)\ ds)\ W(t_0).$$

Remarques. 1) Si $n = 2$ et si l'on connaît une solution non nulle de l'équation, ceci permet de trouver une autre solution linéairement indépednante par quadrature.

2) Si $\mathrm{tr}(A(t)) \equiv 0$, le flot de l'équation préserve le volume.

5. Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Soit $A \in \mathrm{L}(E)$, appelé **champ de vecteurs linéaire**. Les solutions de $(x' = A.x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$, et sont données par l'exponentielle

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Expression des solutions. Elle résulte de la théorie de la jordanisation. Rappelons l'énoncé de celle-ci : il existe une base de E où la matrice de A est formée de **blocs de Jordan** diagonaux. Ceux-ci sont de deux sortes :

1) **blocs de Jordan réels** : si $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, le bloc de Jordan de taille k associé à la valeur propre λ est

$$J(\lambda, k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \ldots\ldots\ldots & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \quad \cdots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 \ldots\ldots & & 0 & \lambda & 1 \\ 0 \ldots\ldots\ldots & & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(k, \mathbb{R}).$$

2) **blocs de Jordan de type complexe** : si $\lambda = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, le bloc de Jordan de taille k associé à la valeur propre $a + ib$ est

$$J_{\mathbb{C}}(a+ib, k) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & I_2 & 0_{2,2} \ldots\ldots\ldots\ldots & & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & I_2 \quad 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0_{2,2} & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0_{2,2} & & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & I_2 \\ 0_{2,2} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0_{2,2} & & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2k, \mathbb{R}).$$

(On le note ainsi pour le distinguer de $J(a + ib, k)$). Pour $k = 1$, on notera $J_{\mathbb{C}}(a + ib, 1) = J_{\mathbb{C}}(a + ib)$.

Remarques. 1) La matrice $\mathrm{Diag}_k(J_{\mathbb{C}}(i))$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2k}$ tel que $J_k^2 = -\mathrm{Id}$, donc il permet de munir $\mathbb{R}^{2k}$ d'une **structure complexe** : $(u + iv).x = ux + vJ(x)$. Ceci permet d'identifier $\mathbb{R}^{2k} = \mathbb{C}^k$, et $J(a, b, 2k)$ devient alors $J(a + ib, k)$. Noter que puisque $J(a + ib, k)$ commute avec la multiplication par i, ceci implique que $J(a, b, 2k)$ commute avec J_k.

Du point de vue intrinsèque, on a la propriété suivante (exercice) : *soit $E_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \subset E$ le sous-espace A-invariant associé à la partie* $\mathrm{Spec}(A) \setminus \mathbb{R}$ *du spectre de A. Alors il existe une unique structure complexe J sur $E_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}$ telle que :*

$AJ = JA$, c'est-à-dire que A est $\mathbb{C}$-linéaire pour la structure complexe J. Ceci permet de définir $\mathrm{Spec}_J(A) \subset \mathrm{Spec}(A)$, *son spectre comme endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire.*

On a $\mathrm{Spec}_J(A) \subset \mathbb{H} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Im\lambda) > 0\}$, *le demi-plan supérieur.*

Exemple : $\mathrm{Spec}(J_{\mathbb{C}}(a + ib) = \{a + ib, a - ib\}$, $\mathrm{Spec}_{J_{\mathbb{C}}(i)}(a + ib) = \{a + ib\}$ si $b > 0$.

Indication. Se ramener au cas où $\mathrm{Spec}(A) = \{a+ib, a-ib\}$ avec $b > 0$. Poser $B = b^{-1}(A - a\mathrm{Id})$ de sorte que $\mathrm{Spec}(B) = \{i, -i\}$, donc $B^2 + \mathrm{Id} = N$ est nilpotent. Poser enfin

$$J = B\big(\mathrm{Id} + N\big)^{-1/2} = B \sum_{r \geq 0} \binom{-\frac{1}{2}}{r} N^r \text{ (somme finie).}$$

2) **Terminologie.** Le **spectre** de A est l'ensemble des zéros complexes du polynôme caractéristique. Un élément de $\mathrm{Spec}(A)$ est appelé **valeur spectrale**, ou (par abus de langage) **valeur propre complexe**.

3) Chaque bloc de Jordan représente un endomorphisme $J = \lambda\mathrm{Id} + N$, où N est nilpotent, plus précisément $N^k = 0$ si J est de taille k. Dans le cas d'un bloc de type complexe, $\Lambda = a + ib$ et

$$\lambda\mathrm{Id} = a + bJ_k = \mathrm{Diag}_k(J(a,b)).$$

4) En combinant ceci pour toutes les valeurs spectrales, on obtient la *décomposition de Dunford* : $A = S + N$, où S est semi-simple c'est-à-dire de matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$, N est nilpotente et $SN = NS$ (donc $SA = AS$, $NA = AN$). Cette décomposition est unique (**ne pas oublier la propriété** $SN = NS$ **pour avoir l'unicité**).

En particulier, $\ker(N)$ est bien défini, c'est le plus grand sous-espace stable sur lequel A est semi-simple. . Avec un léger abus de langage, on l'appelle **somme des espaces propres**.

Exponentielles des blocs de Jordan. Puisque $J = \lambda\mathrm{Id} + N$, où $N^k = 0$ est nilpotent et $\lambda\mathrm{Id}$ et N commutent, on a

$$\exp(tJ(\lambda,k)) = e^{t\lambda} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{J(0,k)^r}{r!} t^r,$$

où $J(0,k)^r = (b_{i,j})$ avec $b_{i,j} = 1$ si $j - i = r \in [0, k-1]$, 0 sinon. Donc $\exp(tJ(\lambda,k)) = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = e^{ta}\dfrac{t^n}{n!}$ si $j - i = r \in [0, k-1]$, 0 sinon. Ou encore :

$$\exp(tJ(\lambda,k)) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} & \cdots\cdots\cdots & & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}e^{\lambda t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & \cdots\cdots & & & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

(ii) Calculons d'abord

$$E_t(a+ib) := \exp(tJ_{\mathbb{C}}(a+ib).$$

En identifiant $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$, $tJ_{\mathbb{C}})$ est la mutliplication par $(ta + ib)$, donc $\exp(tJ_{\mathbb{C}}(a+ib)$ est la mutliplication par $e^{t(a+ib)} = e^{ta}(\cos(tb) + i\sin(tb))$, soit

$$E_t(a+ib) = \begin{pmatrix} e^{ta}\cos(tb) & -e^{ta}\sin(tb) \\ e^{ta}\sin(tb) & e^{ta}\cos(tb) \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, on a

$$\begin{pmatrix} E_t(a+ib) & tE_t(a+ib) & \frac{t^2}{2}E_t(a+ib) & \cdots\cdots\cdots & & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}E_t(a+ib) \\ 0 & E_t(a+ib) & tE_t(a+ib) & \frac{t^2}{2}E_t(a+ib) & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}E_t(a+ib) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & E_t(a+ib) & tE_t(a+ib) \\ 0 & \cdots\cdots & & & 0 & E_t(a+ib) \end{pmatrix}$$

Remarque. Bien sûr, il n'est pas question d'apprendre ces formules par cœur. Cependant, il est utile de se rappeler la conséquence suivante : toute solution de de l'équation $x' = AX$ a pour composantes dans une base des sommes de termes de la forme $t^r e^{\lambda t}$, $t^r e^{at}\cos(bt)$, $t^r e^{at}\sin(bt)$.

6. Étude asymptotique des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Cette étude dépend du spectre de A et plus précisément de la position de celui-ci par rapport aux imaginaires purs :

Spectre stable, instable, indifférent. Considérons la partition

$$\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}_+(A) \amalg \mathrm{Spec}_0(A) \amalg \mathrm{Spec}_-(A)$$

formée des éléments tels que Re $(\lambda) > 0$, $= 0$ ou < 0 respectivement. La première partie est la partie *stable*, la dernière la partie *instable*, celle du milieu la partie *indifférente*.

Cette décomposition du spectre correspond à une décomposition du polynôme caractŕistique $P_A = P_{A,+}P_{A,0}P_{A,-}$ en polynômes **réels** et deux à deux premiers entre eux. Une telle décomposition donne naissance à une unique décomposition en sous-espaces stables par A :

$$E = E_{A,+} \oplus E_{A,0} \oplus E_{A,-},$$

avec $\mathrm{Spec}(A|E_{A,\varepsilon}) = \mathrm{Spec}_\varepsilon(A)$ pour $\varepsilon \in \{+, 0, -\}$.

Ces sous-espaces sont stables par chaque puissance A^r et fermés, donc invariants par e^{tA}. Donc pour comprendre l'asymptotique des solutions de $x' = Ax$ quand $t \to +\infty$, il suffit de le faire dans le cas où le spectre est stable ou indifférent. Le cas du spectre instable s'obtient en renversant le temps à partir du cas stable. De même pour l'asymptotique quand $t \to -\infty$.

Champs de vecteurs linéaires à spectre stable

Proposition. *Soit $A \in \mathrm{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Le spectre de A est stable, soit $\mathrm{Spec}(A) \subset \{\Re(\lambda) < 0\}$.

(ii) Il existe un produit scalaire euclidien et une constante $C > 0$ tels que

$$(\forall x \in E) \qquad (Ax, x) \le -C||x||^2.$$

On peut prendre pour C n'importe quel nombre dans $]0, \max(-\mathrm{Re}\ \mathrm{Spec}(A))[$.

(iii) Il existe un produit scalaire euclidien et une constante $C > 0$ tels que $t \mapsto e^{Ct}||e^{tA}.x_0||$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ pour tout $x_0 \in E$.

Autrement dit, $||e^{tA}.x_0||$ décroît exponentiellement sur $\mathbb{R}$, et ce uniformément en x_0. On peut prendre C comme dans (ii).

(iv) Pour une norme quelconque, il existe $K > 0$ (indépendant de x_0) tel que

$$||e^{tA}.x_0|| \le Ke^{-Ct}||x_0||,$$

avec le même C qu'au (i). Donc $e^{tA}.x_0$ tend vers 0 exponentiellement, et ce de façon uniforme.

(v) Pour tout $x_0 \in E$ on a $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}.x_0 = 0$.

Démonstration. Nous montrons $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (i)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). En complexifiant et en décomposant E en sous-espaces caractéristiques (ou en utilisant la jordanisation), on se ramène au cas où A est un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire, de spectre réduit à λ, avec $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Alors $A = \lambda \mathrm{Id} + N$ avec N nilpotente ($N^n = 0$ où $n = \dim(E)$) et commutant à A.

Partant d'un produit scalaire $(.,.)$ quelconque, on définit

$$(x,y)_R = \sum_{k=0}^{n-1} R^{2k}(N^k x, N^k y).$$

Alors $(\lambda x, x) = \mathrm{Re}(\lambda)||x||^2$, et il en est de même pour $(,)_R$. Donc

$$\begin{aligned}(Ax,x)_R &= (\lambda x, x)_R + (Nx,x)_R \\ &= \mathrm{Re}(\lambda)||x||_R^2 + (Nx,x)_R.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}||Nx||_R^2 &= \sum_{k=0}^{n} R^{2k}||N^{k+1}x||^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} R^{2j-2}||N^j x||^2 \leq R^{-2}||x||_R^2.\end{aligned}$$

Donc

$$(Nx,x)_R \leq ||Nx||_R||x||_R \leq R^{-1}||x||_R^2,$$

d'où finalement

$$(Ax,x)_R \leq (\mathrm{Re}(\lambda) + R^{-1})\ ||x||_R^2.$$

Donc pour R assez grand le produit scalaire $(,)_R$ vérifie (ii). Et il est clair qu'on peut prendre $C < -\mathrm{Re}(\lambda)$ quelconque. En considérant toutes les valeurs spectrales, on arrive ainsi à

$$C < \min(-\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\} = \max(-\mathrm{Re}\ \mathrm{Spec}(A)).$$

Ensuite, supposons (ii) vrai. Soit $f(t) = ||e^{tA}x_0||^2$. On peut supposer $x_0 \neq 0$, donc $f(t) > 0$ partout. Alors

$$f'(t) = 2(Ae^{tA}.x_0, e^{tA}x_0) \leq -2Cf(t),$$

donc $(\log f)' + 2C \leq 0$, soit $e^{2Ct}f = ||e^{Ct}x(t)||^2$ décroît, ce qui donne (iii). Cette preuve montre clairement que (ii) et (iii) sont équivalents.

Ensuite, (iii) implique (iv) par l'équivalence des normes, et (iv) implique trivialement (v).

Reste à prouver $(v) \Rightarrow (i)$. Si (i) est faux, il existe $\lambda = a + ib \in \mathrm{Spec}(A)$ avec $a \geq 0$, donc il existe $x_0 = y_0 + iz_0$ non nul dans le complexifié tel que $A.x_0 = \lambda x$. Alors

$$e^{tA}.x_0 = e^{tA}.y_0 + ie^{tA}.z_0 = e^{t\lambda}x_0 = e^{ta}(\cos tby_0 - \sin tby_0) + ie^{ta}(\sin tbx_0 + \cos tby_0)$$

ne tend pas vers 0, donc $e^{tA}.y_0$ ou $e^{tA}.z_0$ ne tend pas vers 0, donc (v) est faux.

Champs de vecteurs linéaires hyperboliques. Par définition, le champ de vecteurs linéaire A est *hyperbolique* si $\mathrm{Spec}(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, soit

$$\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}_+(A) \amalg \mathrm{Spec}_-(A).$$

On a alors une décomposition invariante $E = E_{A,-} \oplus E_{A,+}$. L'étude faite dans le cas stable implique la

Proposition. *Soit $A \in \mathrm{L}(E)$ un champ linéaire hyperbolique. Soit $E = E_{A,-} \oplus E_{A,+}$ la décomposition invariante associée à* $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}_-(A) \amalg \mathrm{Spec}_+(A)$.

On munit E d'une norme quelconque. Alors il existe $C, K > 0$ avec les propriétés suivantes. Si $x_0 \in E_{A,-}$, alors

$$||e^{tA}x_0|| \leq Ke^{-Ct}||x_0|| \text{ pour } t \geq 0.$$

Et si $x_0 \in E_{A,+}$, alors

$$||e^{tA}x_0|| \geq Ke^{Ct}||x_0|| \text{ pour } t \geq 0.$$

En particulier, on a les caractérisations "dynamiques"

$$E_{A,-} = \{x_0 \in E \mid \lim_{t\to+\infty} e^{tA}.x_0 = 0\}.$$
$$E_{A,+} \setminus \{0\} = \{x_0 \in E \setminus \{0\} \mid \lim_{t\to+\infty} ||e^{tA}.x_0|| = +\infty\},$$

qui justifient les appellations de sous-espaces stable *pour $E_{A,-}$ et* instable *pour $E_{A,+}$.*

Remarque. Le cas modèle est $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$, avec $a, b > 0$. Les solutions de $x' = ax$ sont $(e^{at}x_1(0), e^{-bt}x_2(0))$. Si les deux composantes de la condition initiale $(x_1(0), x_2(0))$ sont non nulles, la solution se trouve sur une hyperbole $x_1x_2 = \text{cste}$.

Cas du spectre indifférent : champs de vecteurs à flot unitaire

Proposition. *Soit $A \in \mathrm{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Le spectre de A est contenu dans $i\mathbb{R}$ et A est semi-simple (sa matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$).

(ii) Il existe un produit scalaire euclidien sur E tel que

$$(\forall x \in E) \quad (Ax, x) = 0.$$

(iii) Il existe un produit scalaire euclidien sur E tel que

$$(\forall x \in E)(\forall t \in \mathbb{R} \quad ||e^{tA}x|| = ||x||.$$

Ou : toute solution de $x' = Ax$ a une norme consstante. On dit que (e^{tA}) est un **flot unitaire** *(ou orthogonal).*

(iv) Pour tout $x \in E$, $e^{tA}x$ reste borné quand $t \in \mathbb{R}$. Ou : toute solution de $x' = Ax$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Si E muni d'un produit scalaire euclidien, on a

$$\frac{d}{dt}||e^{tAx}||^2 = 2(Ae^{tAx}, e^{tAx}).$$

D'où l'équivalence de (ii) et de (iii).

Ensuite, si (i) est vrai, ceci veut dire qu'il existe une base où la matrice de A est formée de blocs de Jordan diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$. Dans cette base, le produit scalaire standard a la propriété voulue.

Par ailleurs, on a évidemment (iii) $\Rightarrow$ (iv), reste à prouver (iii) $\Rightarrow$ (i). D'après la section précédente, on a $\mathrm{Spec}(A) \subset i\mathbb{R}$. De plus, si la matrice de A n'est pas diagonalisable sur $/C$, il y a un bloc de Jordan J de taille $k \geq 2$, donc tel que e^{tJ} fait intervenir des polynômes de degré $k-1>0$, donc il y a des vecteurs x tels que $e^{tA}x$ n'est pas borné, contradiction.

Champs de vecteurs à spectre indifférent, suite. Si le spectre de A est contenu dans $i\mathbb{R}$ mais A n'est pas semi-simple, toute solution de $x' = Ax$ qui ne part par de la somme des espaces propres tend vers l'infini en norme. Plus précisément :

Proposition. *Soit A un endomorphisme avec $\mathrm{Spec}(A) \subset i\mathbb{R}$. On note $A = S + N$ sa décomposition de Dunford. Si $x_0 \notin \ker(N)$, on a $||e^{tA}x_0|| \sim t^k$ quand $t \to +\infty$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. On a $e^{tA} = e^{tS}e^{tN}$. Comme e^{tS} préserve une norme convenable, on peut supposer $S = 0$. Soit k le plus petit entier tel que $N^{k+1}x_0 = 0$, alors

$$e^{tN}x_0 = \sum_{r=0} k \frac{t^r}{r} N^r x_0,$$

donc $||e^{Tn}x_0|| \sim t^k$, cqfd.

Résumé de l'étude asymptotique. En mettant ensemble ce qui précède, on obtient le

Théorème. *Soit $A \in \mathrm{L}(E)$, où E est de dimension finie. Soit x une solution non nulle de l'équation $x' = Ax$, telle que $x(0) = x_{0,+} + x_{0,0} + x_{0,-}$ avec $x_{0,\varepsilon} \in E_{A,\varepsilon}$. Alors :*

1) Si $x_{0,+} \neq 0$, $||x(t)|| \sim e^{at}$ pour $t \to +\infty$, avec $a > 0$.

2) Si $x_{0,+} = x_{0,0} = 0$, $||x(t)|| \sim e^{-at}$ pour $t \to +\infty$, avec $a > 0$.

3) Si $x_{0,+} = x_{0,-} = 0$, $||x(t)||$ est soit borné soit $\sim t^k$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des $x_{0,0}$ tel que $||x(t)||$ reste borné est un sous-espace vectoriel, qui admet un produit scalaire euclidien tel que toutes ces solutions sont de norme constante.

Remarque. En particulier, ceci implique que si une solution est bornée pour des temps $t_n \to +\infty$, elle est bornée pour $t \geq 0$.

6. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Continuité et différentiabilité en fonction des solutions initiales.

Notations. Dans les chapitres sur les équations différentielles, E est un espace de Banach, ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, avec sa topologie donnée par une norme quelconque. **En pratique, E est de dimension finie.**

On considère $U \subset \mathbb{R} \times E$ un ouvert, $f : U \to E$ une application continue, et on étudie l'équation différentielle $(x' = X(t,x))$. Parfois, pour souligner que la variable t est interprétée comme temporelle, on utilise la notation newtonienne $(\dot{x} = X(t,x))$.

Dans le cas autonome, nous noterons le plus souvent l'équation sous la forme $(x' = X(x))$, où $X : U \to E$ est une application continue définie sur un ouvert de E. Cette application est appelée **champ de vecteurs** sur U, ce qui permet d'interpréter géométriquement les solutions comme les «courbes tangentes à X».

1. Équations différentielles à solutions uniques. Solutions maximales. Ensemble global de définition. Flot d'une équation.

Définition. L'équation différentielle $x' = X(t,x)$ **a des solutions uniques** si deux solutions qui coïncident en un point sont égales sur leru domaine commun de définition.

Exemple. Si X est localement Lipschitz en x, l'équation $x' = X(t,x)$ a des solutions uniques (indépendamment du théorème de Cauchy-Lipschitz). De même si f a localement un module de continuité en x de la forme $m(r)$ [c'est-à-dire $|Y(y_1) - Y(y_2)| \leq m(|y_1 - y_2|)$), avec $\displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{m(r)} = \infty$.

Solution maximale. Soit $(x' = X(t,x))$ une équation à solutions uniques, définie sur $U \subset \mathbb{R} \times E$. Pour tout $(t_0, x) \in U$ on peut définir la *solution maximale* de cette équation avec condition initiale x en t_0, de la façon suivante. Soit $I_X(t_0,x)$ la réunion de tous les intervalles de définition I_φ d'une solution φ telle que $\varphi(t_0) = x$. C'est un intervalle, puisque tous ces intervalles contiennent x. Si $t \in I_X(t_0,x)$ il existe un I_φ contenant t. On pose $\varphi_{t_0,x}(t) = \varphi(t)$, c'est indépendant de φ par unicité, et $\varphi_{t_0,x}$ vérifie l'équation sur chaque I_φ donc en particulier sur $I_X(t_0,x)$.

Dans le cas autonome, il suffit de considérer le cas où $t_0 = 0$. En effet, si t_0 est quelconque, l'application $\varphi \mapsto (\psi(t) = \varphi(t - t_0))$ est une bijection entre les solutions φ telles que $\varphi(0) = x$ et les solutions ψ telles que $\psi(t_0) = x$.

On définit de même $I_X(x) \subset \mathbb{R}$, intervalle contenant 0, et φ_x la solution maximale telle que $\varphi_x(0) = x$. Cette solution sera appelée bf trajectoire ou **orbite** de f.

Remarque. Dans une équation autonome $(x' = X(x))$, les images des orbites sont souvent aussi appelées orbites. La description de U comme réunion d'orbites est alors appelée **portrait de phase** du champ X.

Flot. Soit $f : U \subset \mathbb{R} \times E \to E$ une application continue telle que l'équation associée a des solutions uniques. Pour tout $(t_0,x) \in U$ on a donc une solution maximale $\varphi_{t_0,x} : I_X(t_0,x) \to E$. Pour étudier toutes les solutions à la fois, il sera commode de noter

$$\varphi_{t_0,x}(t) = \varphi_X^{t_0,t}(x).$$

On appellera $\varphi_X^{t_0,t}$ le **flot de l'équation du temps t_0 au temps t**. C'est une application partiellement définie de E dans E, son domaine de définition est

$$D_X(t_0,t) = \{x \in E \mid (t_0,x) \in U \text{ et } t \in I_X(t_0,x)\}.$$

Notons que $D_X(t_0,t_0) = \{x \in E \mid (t_0,x) \in U\}$ et que $\varphi_X^{t_0,t_0} = \mathrm{Id}$.

On définit de même **l'ensemble global de définition des solutions** :

$$\begin{aligned} D_X &= \{(t_0,t_0,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E \mid t \in I_X(t_0,x)\} \\ &= \{(t_0,t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E \mid x \in D_X(t_0,t)\}. \end{aligned}$$

et **l'application globale de solution**

$$\Phi_X : (t_0,t,x) \in D_X \mapsto \Phi_X(t_0,t,x) = \varphi_X^{t_0,t}(x)$$

Proposition (propriété de flot). *Supposons que l'équation ($x' = X(t,x)$) a des solutions uniques. Alors*

$$\varphi_X^{t_0,t_2} = \varphi_X^{t_1,t_2} \circ \varphi_X^{t_0,t_1},$$

où les deux membres sont des applications partiellement définies de E dans E. Plus précisément :

$$\varphi_X^{t_0,t_2}(x) = \varphi_X^{t_1,t_2}(\varphi_X^{t_0,t_1}(x)),$$

cette égalité ayant lieu si les deux membres sont bien définis. En fait, il suffit que le membre de droite soit défini, celui de gauche le sera alors aussi.

Démonstration. Les applications u, v définies par

$$\begin{aligned} u(t) &= \varphi_X^{t_0,t}(x) \\ v(t) &= \varphi_X^{t_1,t} \circ \varphi_X^{t_0,t_1}(x) = \varphi_X^{t_1,t}(\varphi_X^{t_0,t_1}(x)) \end{aligned}$$

sont toutes les solutions maximales de ($x' = X(t,x)$). On a $u(t_1) = \varphi_X^{t_0,t_1}(x) = v(t_1)$. Par unicité des solutions et maximalité, $u = v$, cqfd.

Corollaire. *L'application $\varphi_X^{t_0,t_1}$ est une bijection de $D_X(t_0,t_1)$ sur $D_X(t_1,t_0)$, et son inverse est $\varphi_X^{t_1,t_0}$.*

Cas autonome. Si x est solution d'une équation autonome ($x' = X(x)$) avec la condition initiale $\varphi(0) = x$, $\varphi(t_0 + t)$ est solution de la même équation avec la condition initiale $\varphi(t_0) = x$. S'il y a unicité des solutions, on en déduit $\varphi_X^{t_0,t} = \varphi_X^{0,t-t_0}$. On notera $\varphi_X^{0,t} = \varphi_X^t$, d'où la *propriété de flot*, qui justifie la notation exponentielle :

$$\varphi_X^{t+u} = \varphi_X^t \circ \varphi_X^u.$$

On appellera *ensemble global de définition des solutions* l'ensemble $D_X = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in I_X(x)\}$ et *flot global*, ou simplement *flot*, l'application

$$(t,x) \in D_X \mapsto \Phi_X(t,x) = \varphi_X^t(x).$$

3. Orbites d'une équation différentielle autonome

Soit $X : U \subset E$ un champ de vecteurs de classe à solutions uniques. Une *orbite* de X est une application $\gamma :]a_-, a_+[\to U$ telle que $\gamma' t) = X(\gamma(t))$, donc est de classe C^{k+1}. Si elle n'est pas constante, $\gamma'(t)$ ne s'annule jamais donc γ est une immersion.

Remarque. Nous verrons que γ est soit injective soit périodique. Dans ce dernier cas, l'image est une courbe compacte. Dans le premier cas, c'est une courbe si et seulement si l'image est localement fermée.

Exemple d'orbite non localement fermée : $\gamma(t) = (e^{it}, e^{i\alpha t})$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On peut implanter cet exemple sur $\mathbb{R}^3$ en prenant un champ de vecteurs tangent à un tore. Mais ça ne peut arriver dans $\mathbb{R}^2$ (corollaire du théorème de Poincaré-Bendixson) ni évidemment dans $\mathbb{R}$.

L'adhérence d'une orbite peut ne pas être une sous-variété, par exemple dans le cas de *l'attracteur de Lorenz.*

4. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $X : U \subset \mathbb{R} \times E \to E$ une application localement Lipschitz par rapport à la variable d'espace, et soit $(t_0, x) \in U$.

Alors l'équation différentielle ($x' = X(t, x)$) a une solution telle que $\varphi(t_0) = x$, définie sur un intervalle ouvert contenant t_0. De plus, cette solution est unique, c'est-à-dire que si ψ est une autre solution telle que $\psi(t_0) = x$, on a $\psi(t) = \varphi(t)$ si les deux membres sont définis.

Remarque. Si E est de dimension finie, le théorème de Cauchy-Peano dit que le résultat d'existence reste vrai même si f n'est que continue. Mais ce résultat est rarement utilisé à cause de la non-unicité.

Démonstration. Nous connaissons déjà l'unicité, il n'y a donc qu'à prouver l'existence.

Soit $(t_0, x) \in U$, nous choisissons r et ρ dans $\mathbb{R}_+^*$ assez petits pour que $[t_0 - r, t_0 + r] \times B'(x, \rho) \subset U$ et

$$
\begin{aligned}
||f|| \leq M < +\infty &\quad \text{sur } [t_0 - r, t_0 + r] \times B'(x, \rho) \\
\mathrm{Lip}_2(f) = L < +\infty &\quad \text{sur } [t_0 - r, t_0 + r] \times B'(x, \rho).
\end{aligned}
$$

Quitte à diminuer r, on peut supposer $Lr < 1$ et $Mr \leq \rho$. On définit alors

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= C^0([t_0 - r, t_0 + r], E) \\
\mathcal{B}'(r, \rho) &= C^0([t_0 - r, t_0 + r], B'(x, \rho)).
\end{aligned}
$$

Puisque E est un espace de Banach, $\mathcal{E}$ est aussi un espace de Banach pour la norme $||.||_\infty$. Et $\mathcal{B}'(r, \rho)$ est un fermé de $\mathcal{E}$ donc un espace métrique complet.

Ensuite on définit $F : [t_0 - r, t_0 + r] \times \mathcal{B}'(r, \rho) \to \mathcal{E}$ en posant

$$
F(t, x) = x + \int_{t_0}^{t} X(s, x(s))\, ds.
$$

L'application F est continue et vérifie $||F(t, x) - x|| \leq M|t - t_0| \leq Mr \leq \rho$, donc $F(., x) \in \mathcal{B}'(r, \rho)$. De plus,

$$
\begin{aligned}
||F(t, x) - F(t, y)|| = || \int_{t_0}^{t} (X(s, x(s)) - tX(s, y(s)))\, ds|| &\leq \int_{t_0}^{t} L||x(s) - y(s)||\, ds \\
&\leq L|t - t_0|||x - y|| \leq Lr||x - y||.
\end{aligned}
$$

Donc l'application $(x \mapsto F(., x))$, de $\mathcal{B}'(r, \rho)$ dans lui-même, est Lipschitz de constante $\leq Lr < 1$, donc c'est une contraction. Comme $\mathcal{B}'(r, \rho)$ est un espace métrique complet, $(x \mapsto F(., x))$ a un unique point fixe φ par le théorème de point fixe de Banach. L'application φ vérifie l'équation intégrale

$$\varphi(t) = x + \int_{t_0}^{t} X(s, \varphi(s))\, Df.$$

Donc elle est dérivable et vérifie $\varphi'(t) = X(t, \varphi(t))$ sur $[t_0 - r, t_0 + r]$. De plus, $\varphi(t_0) = x$, ce qui prouve le théorème.

5. Continuité en les conditions initiales

Théorème. *Soit X satisfaisant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Le domaine de définition des solutions $D_X \subset \mathbb{R} \times E \times \mathbb{R}$ est ouvert et $\Phi_X : U \to E$ est continue.*

Démonstration.

1) Montrons d'abord que D_X contient un voisinage V de $\Delta = \{(t_0, t_0, x) \mid (t_0, x) \in U\}$, et que Φ_X est continue sur V. Soit $(t_0, x) \in U$, on peut trouver r et $\rho > 0$ tels que

$$\begin{aligned}
&B := [t_0 - 2r, t_0 + 2r] \times B'(x, \rho) \subset U \\
&||f|B|| \leq M < +\infty \ \ , \ \ \mathrm{Lip}_2(f|B) = L < +\infty \\
&Lr < 1 \ \ , \ \ \frac{\rho}{2} + Mr \leq \rho.
\end{aligned}$$

On définit $\mathcal{B}'(r, \rho) \subset E$ comme avant, puis $F : [t_0 - r, t_0 + r] \times B'(x, \rho) \times \mathcal{B}'(r, \rho) \to E$:

$$F(t_1, x_1, x)(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} X(s, x(s))\, ds.$$

Alors F est continue et

$$\begin{aligned}
||F(t_1, x_1, x)(t) - x|| &\leq ||x_1 - x|| + M \max_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} |t - t_1| \\
&\leq \frac{\rho}{2} + Mr \leq \rho.
\end{aligned}$$

Donc $F(t_1, x_1, .)$ envoie $\mathcal{B}'(r, \rho)$ dans elle-même, et est Lipschitz de constante $\leq Lr < 1$. donc uniformément contractante. Ceci permet d'appliquer le théorème de point fixe de Banach, version paramétrée. Donc $F(t_1, x_1, .)$ a un unique point fixe $\varphi = \varphi_{t_1, x_1}$, qui varie continûment en (t_1, x_1). Ce point fixe est une solution de l'équation ($x' = X(t, x)$), qui vérifie $\varphi(t_1) = x_1$, et est définie sur $[t_0 - r, t_0 + r]$. Donc D_X contient

$$V(t_0, x) = [t_0 - r, t_0 + r] \times B'(x, \rho) \times [t_0 - r, t_0 + r]$$

qui est un voisinage de (t_0, x, t_0), et il contient donc un voisinage de Δ.

Sur $V(t_0, x)$ on a $\Phi_X(t_1, t, x_1) = \varphi_{t_1, x_1}(t)$. La continuité de $(t_1, x_1) \mapsto \varphi_{t_1, x_1}$ implique celle de $\Phi_X|V$.

2) Pour globaliser, on va utiliser la propriété de flot. Soit $(t_0, T, x) \in D_X$, avec par exemple $t_0 \leq T$. Notons $\varphi(t) = \varphi_X^{t_0, t}(x)$, $t_0 \leq t \leq T$. En utilisant 1) et la compacité de $[t_0, T]$, on trouve $r, \rho > 0$ et une subdivision $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = T$ tels que

- $t_{i+1} - t_i < r$ pour tout $i = 0, \cdots, n - 1$
- D_X contient $[t_i - r, t_i + r] \times [t_i - r, t_i + r] \times B'(\varphi(t_i), \rho)$ pour tout $i = 0, \cdots, n$.

Donc $\varphi_X^{t_i,t_{i+1}}$ est défini et continu sur un voisinage de $\varphi(t_i)$. Utilisant la propriété de flot, on en déduit que

$$\varphi_X^{t_0,t_k} = \varphi_X^{t_{n-1},t_n} \circ \varphi_X^{t_{n-2},t_{n-1}} \cdots \varphi_X^{t_0,t_1}$$

est défini et continu sur un voisinage V de x.

Soit enfin $(t,u,x) \in [t_0 - r, t_0 + r] \times [T - r, T + r] \times V$, alors

$$\Phi_X(t,u,x) = \varphi_X^{t_n,u} \circ \varphi_X^{t_0,t_n} \circ \varphi_X^{t,t_0}(x)$$

est bien défini donc D_X contient $[t_0 - r, t_0 + r] \times [T - r, T + r] \times V$. Enfin, Φ_X est continue en (t,u,x) d'après 1), ce qui termine la preuve.

Corollaire. *L'application $\Phi_X^{t_0,t_1}$ est un homéomorphisme de $D_X(t_0,t_1)$ sur $D_X(t_1,t_0)$.*

6. Différentiabilité en les conditions initiales

Théorème. *Considérons une équation différentielle ($x' = X(t,x)$) avec f de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Alors l'application globale de solution $\Phi_X : D_X \to E$ est de classe C^k.*

Démonstration. Il suffit pour cela de le prouver au voisinage d'un point (t_0, x, t_0). en effet, on pourra alors appliquer la propriété de flot pour globaliser comme pour la preuve de la continuité.

Or φ_{t_1,x_1} est la solution de l'équation implicite

$$F((t_1,x_1),x) = x - G(t_1,x_1,x) = 0,$$

où G est l'application de la section précédente :

$$G(t_1,x_1,x)(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} X(s,x(s))\, ds.$$

Supposons que l'on sache que G est de classe C^k. La dérivée $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ sera $\mathrm{Id} - \dfrac{\partial G}{\partial x}$, qui est inversible car $G(t_1,x_1,.)$ est une contraction donc $||\dfrac{\partial G}{\partial x}|| < 1$. La proposition dira donc que φ_{t_1,x_1} est une fonction C^k de (t_1,x_1), donc $\varphi_{t_1,x_1}(t) = \Phi_X(t_1,x_1,t)$ est une fonction C^k de (t_1,x_1) pour tout t.

Le fait que $\Phi_X(t_1,x_1,t)$ est de classe C^k par rapport à l'ensemble des variables (t_1,x_1,t) s'en déduit en utilisant qu'elle est dérivable en t avec

$$\frac{\partial \Phi_X}{\partial t}(t_1,x,t) = X(t, \varphi_{t_1,x_1}(x)),$$

et en faisant une récurrence sur k.

Il suffit donc de montrer que F est de classe C^k. Ceci résultera du lemme suivant.

Le ω-lemme. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit U un ouvert de E et soit $f : U \to F$ une application de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Alors l'application*

$$\Phi : g \in C^0([0,1],U) \mapsto f \circ g \in C^0([0,1],F)$$

est de classe C^k. Sa différentielle en x est

$$D\Phi(g).h = Df \circ x = [t \mapsto Df(g(t)).h(t)].$$

Démonstration. Fixons $g \in C^0([0,1], U)$. Par compacité de $g([0,1])$, pour $\delta_0 > 0$ assez petit, le voisinage $V(\varphi([0,1]), \delta_0)$ est contenu dans U. Soit $h \in C^0([0,1], E)$ vérifiant $||h|| < \delta_0$. Le théorème des accroissements finis implique

$$\begin{aligned} ||\Phi(x+h) - \Phi(x) - (Df \circ x).h||_{C^0} &\leq \max_{t,s\in[0,1]} ||Df(\varphi(t) + sh(t)) - Df(\varphi(t))||.||h||_{C^0} \\ &\leq \Big(\sup_{\substack{x \in g([0,1]), y \in U \\ ||x-y|| \leq ||h||_{C^0}}} ||Df(y) - Df(x))|| \Big).||h||_{C^0}. \end{aligned}$$

Ce lemme sera une conséquence immédiate du sous-lemme suivant, qui est une version renforcée de la continuité uniforme d'une application continue sur un sous-ensemble compact..

Sous-lemme. *Soit $F : X \to X$ une application continue entre deux espaces métri-ques. Si $K \subset X$ est compact, alors*

$$\sup_{\substack{x \in K, y \in X \\ d(x,y) \leq \delta}} = o(1) \text{ quand } \delta \to 0.$$

Preuve du sous-lemme. Si la conclusion est fausse, il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites de points $x_n \in K, y_n \in X$ avec $d(x_n, y_n) \to 0$ et $d(F(x_n), F(y_n)) > \varepsilon$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $x_n \to x \in K$. Alors $y_n \to x$, donc $F(x_n), F(y_n) \to F(x)$, d'où une contradiction.

Fin de la preuve du ω-lemme. Le sous-lemme appliqué à $K = g([0,1]), F = Df$ implique

$$(*) \qquad \sup_{\substack{x \in [0,1], y \in U \\ ||x-y|| \leq \delta}} ||Df(y) - Df(x))|| = o(1) \text{ quand } \delta \to 0.$$

Donc, $||\Phi(x+h) - \Phi(x) - (Df \circ x).h||_{C^0}$ est un $o(||h||_{C^0})$ quand $||h||_{C^0} \to 0$. Par ailleurs, $||(Df \circ x).h||_{C^0} \leq ||Df \circ x||_{C^0}.||h||_{C^0}$, donc la forme linéaire $Df \circ x$ est continue. Donc Φ est différentiable en x, sa différentielle étant $D\Phi(x) = Df \circ x$. Enfin, l'application $D\Phi$ est continue d'après $(*)$. Ceci prouve le cas où $k = 1$.

Comme $D\Phi$ a la même forme que Φ, une récurrence immédiate sur k prouve qu'elle est de classe C^{k-1} si $k \geq 2$ est fini, donc que Φ est de classe C^k. Ceci étant vrai pour tout k fini est aussi vrai pour k infini.

Corollaire. *L'application $\Phi_X^{t_0,t_1}$ est un C^k-difféomorphisme de $D_X(t_0, t_1)$ sur $D_X(t_1, t_0)$.*

7. Équation linéarisée

Soit $X : U \subset \mathbb{R} \times E \to E$ de classe C^1. Soit $\varphi : [t_0, t_1] \to E$ une solution de l'équation $(x' = X(t,x))$. L'**équation linéarisée en** φ (ou : **le long de** φ) est par définition l'équation linéaire

$$(\delta x)' = \frac{\partial X}{\partial x}(t, \varphi(t)).\delta x.$$

Proposition. *Soit $f : U \subset \mathbb{R} \times E \to E$ de classe C^1. Soit (t_0, t_1, x) appartenant à D_X, l'ensemble de définition global des solutions. Soit $\varphi(t) = \Phi_X(t_0, t, x)$, la solution telle que $\varphi(t_0) = x$, définie sur $[t_0, t_1]$ (ou $[t_1, t_0]$ si $t_1 < t_0$). Alors*

$$\frac{\partial \Phi_X}{\partial x}(t_0, t_1, x) = R_\varphi(t_1),$$

où $R_\varphi : [t_0, t_1] \to \mathrm{GL}(E)$ *est la résolvante de l'équation linéarisée en* φ*, soit la solution de*

$$\frac{dR_\varphi}{dt} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, \varphi(t)) \circ R_\varphi(t) \ , \ R_\varphi(t_0) = \mathrm{Id}_E.$$

Démonstration. On écrit $\Phi_X(t_0, t, x)$ sous forme intégrale :

$$\Phi_X(t_0, t, x) = x + \int_{t_0}^{t} X(s, \varphi(s))\, ds,$$

et l'on dérive par rapport à x. Il vient

$$\frac{\partial \Phi_X}{\partial x}(t_0, t, x) = \mathrm{Id} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial X}{\partial x}(s, \varphi(s)) \circ \frac{\partial \Phi_X}{\partial x}(t_0, s, x)\, ds$$

Donc le membre de gauche est dérivable par rapport à t, et l'on a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi_X}{\partial x}(t_0, t, x) = \frac{\partial X}{\partial x}(s, \varphi(s)) \circ \frac{\partial \Phi_X}{\partial x}(t_0, s, x).$$

Comme $\frac{\partial \Phi_X}{\partial x}(t_0, t_0, x) = \mathrm{Id}_E$, on a

$$\frac{\partial \Phi_X}{\partial x}(t_0, t, x) = R_\varphi(t).$$

Pour $t = t_1$ on trouve l'identité annoncée.

Cas d'une équation autonome. L'équation linéarisée devient

$$(\delta x)' = DX(\varphi(t)).\delta x.$$

Noter qu'elle n'est pas autonome ! Elle a pour solution $X \circ \varphi$, donc on a

$$D\varphi_X^t(X(0)) = X(\varphi(t)).$$

Ceci correspond à la «variation triviale» $\varphi_h(t) = \varphi(t + h)$.

8. Points réguliers, transversales, boîtes de flot

Définitions. Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs localement Lipschitz. Le point $x_0 \in E$ est un **point régulier** de X si $X(x_0) \neq 0$, ou de façon équivalente la solution de $x' = X(x)$ à condition initiale x_0 n'est pas constante. On note $\mathrm{Reg}(X)$ l'ensemble (ouvert) des points réguliers de X. Noter que cet ensemble est invariant par le flot, c'est-à-dire que toute orbite issue d'un point de $\mathrm{Reg}(X)$ reste dans $\mathrm{Reg}(X)$.

Une hypersurface $\Sigma \subset U$ est **transverse à** X **en** $x \in \Sigma$ si $X(x) \notin T_x\Sigma$, donc $\Sigma \subset \mathrm{Reg}(X)$ et $T_x\Sigma \oplus \mathbb{R}X(x) = E$. On dit aussi que Σ est **une transversale** à X en x_0.

L'hypersurface Σ est dite transverse à x (tout court) si elle est transversale à X en tout point de Σ. On dit aussi que c'est une transversale à X.

Remarque. Si Σ est transverse à X en x_0, tout voisinage assez petit de x_0 dans Σ est une transversale à X. En effet, si $\psi : W \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \Sigma$ est un paramétrage local tel que $\psi(0) = x_0$, soit

$$D : W \to \mathbb{R} \ , \ D(x) = \det(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}}, X(\psi(x)).$$

Comme $D(x_0) \neq 0$ et que D est continue, D ne s'annule pas si W est assez petit, cqfd.

En particulier, si x_0 est un point régulier de X, et si H un hyperplan ne contenant pas $X(x_0)$., tout voisinage assez petit de x_0 dans $x_0 + H$ est une transversale à x_0. Plus généralement,

Une **boîte de flot** pour X est une restriction de l'application globale de solution Φ_X à un produit $\Sigma \times I$, où $\Sigma \subset U$ est une hypersurface, telle que son image est un ouvert de U et qui est un difféomorphisme sur son image.

Ceci implique que Σ est une transversale, en effet on a $\dfrac{\partial \Phi_X}{\partial t}(x, 0) = X(x)$ si $x \in \Sigma$, et comme $D\Phi_X$ est injectif ceci n'est pas dans $D\Phi_X(T_x\Sigma) = T_x\Sigma$.

On a une réciproque partielle.

Théorème. *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs de classe C^1, et soit $\Sigma \subset U$ une transversale à X. Soit $\Sigma_1 \subset \Sigma$ un ouvert relativement compact dans Σ. Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'application Φ_X est bien définie sur $\Sigma_1 \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ et est un C^k-difféomorphisme sur son image, donc une boîte de flot.*

Corollaire (boîte de flot locale). *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs de classe C^1, et soit $x_0 \in U$ un point régulier. Soit H un hyperplan ne contenant pas $X(x_0)$, et soit $r > 0$ tel que $H \cap B'(x_0, r) \subset U$. Alors pour ε assez petit, la restriction $\Phi_X|(H \cap B'(x_0, r)) \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ est une boîte de flot.*

Démonstration. Le domaine de définition de Φ_X contient le compact $\overline{\Sigma}_1 \times \{0\}$ et il est ouvert, donc il contient $\overline{\Sigma}_1 \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ pour ε assez petit.

Puisque Σ est une transversale à X, l'application Φ_X est une immersion sur $\overline{\Sigma}_1 \times \{0\}$, donc sur $\overline{\Sigma}_1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ pour ε assez petit.

Reste à montrer que $\Phi_X|\overline{\Sigma}_1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ est injectif pour ε assez petit. Montrons le par l'absurde : si ce n'est pas le cas, il existe des suites (x_i, t_i) et (y_i, u_i) avec $t_i, u_i \to 0$, $(x_i, t_i) \neq y_i$ et $\Phi_X(x_i, t_i) = \Phi_X(y_i, u_i)$. Par compacité, on peut supposer que $x_i \to x \in \Sigma$, $y_i \to y \in \overline{\Sigma}_1$. On a $x = \Phi_X(x, 0) = \Phi_X(y, 0) = y$, et comme Φ_X est une immersion en x, elle est localement injective, contradiction.;

Remarque. Cet argument est très général : il montre que si une application entre sous-variétés est une immersion et est injective sur un compact K, elle est injective sur un voisinage de K.

Redressement du flot. L'application Φ_X^{-1} envoie les orbites de X sur celles du champ constant $X = e_n$ en préservant le temps, on dit qu'elle **redresse** localement (le flot de) X. On peut reformuler le corollaire en disant que le flot d'un champ de vecteurs peut être localement redressé en tout point régulier.

7. Complétude, orbites périodiques, intégrales premières, fonctions de Liapounov.

1. Critère de prolongement

Théorème. *Soit $X : U \subset \mathbb{R}\times E \to E$ localement Lipschitz en x. Soit x une solution maximale de $x' = X(t,x)$, définie sur un intervalle fini $]a,b[$ contenant t_0.*

On suppose que $(t, x(t))$ reste dans un compact $K \subset U$ pour tout $t \in [t_0, b[$. Alors x se prolonge comme solution au-delà de b. On a un énoncé analogue si $(t, x(t))$ reste dans un compact $K \subset U$ pour tout $t \in]a, t_0]$.

Corollaire. *Toute orbite de X qui reste dans un compact de U pour tout $t \geq 0$ (dans l'intervalle de définition) est définie sur $\mathbb{R}^+$. Si elle reste dans un compact de U pour tout t, elle est définie sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(t_n, x(t_n))$ converge vers $(b, x_\infty) \in K$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour $r > 0$ assez petit et n assez grand il existe une solution x_n telle que $x_n(t_n) = x(t_n)$, et cette solution est définie sur $[t_n - r, t_n + r]$. Par unicité des solutions, on a $x_n = x$, ce qui permet de prolonger x comme solution jusqu'à $t_n + r$, qui est $> b$ pour n assez grand, cqfd.

Remarque. Quand E est de dimension finie, K est compact si et seulement si il est borné et fermé dans $\mathbb{R} \times E$. Ceci permet de donner des critères pratiques pour montrer qu'une solution est définie sur $[t_0, +\infty[$ ou sur $]-\infty, t_0]$.

Par exemple, si $U = \mathbb{R} \times E$ et $||X(t,x)|| \leq C(t)||x||$, on a $||x'(t)|| \leq C(t)||x(t)||$ pour toute solution. Par le lemme de comparaison,

$$||x(t)|| \leq \exp|\int_{t_0}^{t} C(s)ds|\ ||x(t_0)||,$$

donc x est définie sur $\mathbb{R}$ si elle est maximale.

Dans le cas autonome, une autre possibilité pour montrer qu'une solution est définie jusqu'en $+\infty$ ou $-\infty$ est d'utiliser une *fonction de Liapounov*, voir plus loin.

Jusqu'à la fin du cours sur les équations différentielles, nous nous restreignons à des équations autonomes.

2. Champs de vecteurs complets

On dit que le champ de vecteurs $X : U \to E$ est **complet** s'il est à solutions uniques et si ses orbites (solutions maximales) sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. L'énoncé suivant résulte des théorèmes de continuité et de différentiabilité et de la propriété de flot :

Proposition. *(i) Soit $X : U \to E$ un champ complet. Alors φ_X^t est un homéomorphisme de U et l'application*

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_X^t \in \text{Homéo}(U)$$

est un morphisme de groupes. De plus, l'application $(x,t) \mapsto \varphi_X^t(x)$ est continue. On dit que (φ_X^t) est un groupe à un paramètre *d'homéomorphismes de U (= action continue de $\mathbb{R}$ par homéomorphismes sur U).*

(ii) Si X est de classe C^k avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, φ_X^t est un C^k-difféomorphisme, et l'application $(x,t) \mapsto \varphi_X^t(x)$ est de classe C^k. On dit que (φ_X^t) est un groupe à un paramètre de C^k-difféomorphismes de U.

Remarque(exercice). Réciproquement, soit (φ^t) un groupe à un paramètre de C^1-difféomorphismes de U. Alors $X(x) := \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} \varphi^t(x)$ est un champ de vecteurs à solutions uniques, complet et tel que $\varphi_X^t = \varphi^t$.

En particulier, on obtient ainsi une bijection naturelle entre champs de vecteurs C^∞ sur U et groupes à un paramètre (φ^t) dans $\mathrm{Diff}_{C^\infty}(U)$.

Exemple : champs à croissance au plus linéaire. Soit $X : E \to E$ un champ de vecteurs localement Lipschitz et à croissance plus linéaire, c'est-à-dire $||X(x)|| \leq C(||x||+1)$, ou $||X(x)|| \leq C||x||$ pour $||x|| \geq 1$. Alors X est complet d'après les remarques à la fin de la section 1.

Remarque (exercice). On peut montrer que pour tout champ de vecteurs X localement Lipschitz il existe une fonction $h : U \to \mathbb{R}_+^*$ de classe C^∞ telle que le champ hX est complet. Pour cela, il suffit que, en notant $I_X(x) =]a(x), b(x)[$, on ait

$$(\forall x \in U) \quad \int_0^{b(x)} \frac{dt}{h(\varphi_X^t(x)} = +\infty = \int_{a(x)}^0 \frac{dt}{h(\varphi_X^t(x)}.$$

Si $U = E$ il suffit d'avoir $h \leq \frac{1}{||X||}$. Noter que les orbites de hX sont les mêmes que celles de X, avec un reparamétrage du temps.

3. Orbites périodiques

Définition. Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs localement Lipschitz. Une orbite x est dite **périodique** si elle est non constante, définie sur $\mathbb{R}$ et est une application périodique, c'est-à-dire qu'il existe $T \neq 0$ tel que $x(t+T) = x(t)$. L'ensemble de ces T plus 0 est alors un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$, le groupe des périodes $\mathrm{Pér}(T)$. Il est donc de la forme $T\mathbb{Z}$ où $T > 0$ est la **période minimale**, appelé aussi simplement **période**.

Propriété. *Soit x une orbite non constante. Elle est périodique si et seulement si elle est non injective.*

Démonstration. Il suffit de montrer «si». Par hypothèse, il existe $t_0 < t_1$ tels que $x(t_0) = x(t_1)$. Soit $a = t_1 - t_0$, l'unicité des solutions implique que l'égalité $x(t) = x(t+a)$ a lieu pour t proche de t_0, puis pour tout t. Donc x est définie sur un intervalle stable par addition de a, donc sur $\mathbb{R}$, et elle est bien périodique.

Théorème. *Si l'orbite x est périodique de période (minimale) T, l'application $e^{it} \mapsto x\left(\frac{Tt}{2\pi}\right)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{U}$ sur l'image $C = x(\mathbb{R})$. En particulier, cette image est difféomorphe à un cercle.*

Démonstration. Cette application est continue et bijective, donc un homéomorphisme sur son image puisque $\mathbb{U}$ est compact et E séparé. Elle est de plus une immersion, donc pour voir que c'est un difféomorphisme il reste à montrer que C est une courbe (sous-variété de dimension 1) : ceci résulte du fait que c'est une immersion et un homéomorphisme local, et de la linéarisation des immersions.

Remarque (exercice). Si $x : I \to U$ est une orbite d'un champ de vecteurs localement Lipschitz X, qui est fermée et non constante, alors $x : I \to x(I)$ est une immersion ouverte, donc l'image est une courbe. De plus, si $x(I)$ est compact, x est périodique.

Dans un cadre topologique : si l'on a une action continue $(t,x) \mapsto t.x$ de $\mathbb{R}$ sur un espace topologique E localement compact (ou : un groupe à un paramètre d'homéomorphismes), toute orbite $t \mapsto t.x$ est une application ouverte sur son image si celle-ci est fermée, et toute orbite compacte est périodique.

4. Intégrales premières

Soit $X : U \to \mathbb{R}$ un champ de vecteurs autonome, et soit $F : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

Soit x une solution de $(x' = X(x))$, la dérivée de F le long de x est

$$\begin{aligned}\dot{F} = \frac{d}{dt}F(\varphi(t)) &= DF(\varphi(t))(\varphi'(t)) \\ &= DF(\varphi(t))(X(x(t)) = \langle \nabla F(x(t)), X(x(t))\rangle.\end{aligned}$$

Notons $DF(X) = \langle \nabla F, X\rangle$ la fonction $(x \in U \mapsto DF(x)(X(x)) = \langle \nabla F(x), X(x)\rangle)$. Cette dérivée est donc $DF(X) \circ x$, ou en abrégé :

$$\dot{F} = DF(X).$$

Intégrale première. On dit que F est une **intégrale première** de X si F est constante sur les solutions de $x' = X(x)$. D'après ce qui précède, ceci équivaut si F est différentiable à $DF(X) = 0$. Géométriquement : ∇F et X sont orthogonaux.

Exemple : équations de Hamilton. Si H est une fonction de classe C^2 définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on définit le **champ de vecteurs hamiltonien** $X_H(q,p) = (\nabla_q H, -\nabla_p H)$. Noter qu'il est de classe C^1. Ses orbites sont les solutions des **équations de Hamilton** (autonomes)

$$\begin{cases} \dot{q} = \nabla_p H = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\nabla_q H = -\dfrac{\partial H}{\partial q}. \end{cases}$$

La fonction H est une intégrale première de ces équations. Exemple fondateur (mécanique classique) : $H(q,p) = \dfrac{||p||^2}{2m} + V(q)$.

Le critère de prolongement implique immédiatement la

Proposition. *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs autonome, localement Lipschitz. Si X a une intégrale première à niveaux compacts, X est complet.*

4. Intégrales premières en dimension 2

En dimension 2, l'existence d'une intégrale première permet de décrire les solutions :

Théorème. *Soit $X : U \subset \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs localement Lipschitz. Soit $F : U \to \mathbb{R}$ une intégrale première de classe C^1 telle que de plus $\mathrm{crit}(F) = \mathrm{Sing}(X)$. Soit x_0 un point régulier de X. On note toute C la composante connexe de x_0 dans*

$$\Gamma = F^{-1}(F(x_0)) \setminus \mathrm{crit}(F) = F^{-1}(F(x_0)) \setminus \mathrm{Sing}(X),$$

(i) L'orbite $\varphi_X^t(x_0) = x(t)$ de x_0 est égale à C, et C est une courbe.

(ii) Si C est compacte, donc difféomorphe à S^1, l'orbite est périodique.

Démonstration. (i) On a $F(x(t)) = \text{cste} = F(x_0)$ et on sait que l'orbite est contenue dans $\text{Reg}(X) = U \setminus \text{Crit}(F)$, donc elle est contenue dans Γ, et comme elle est connexe elle est contenue dans C. Par ailleurs, $F|\Gamma$ est une submersion, donc Γ est une courbe, donc aussi C.

Reste à prouver que $x : I_X \to C$ est surjectif, et pour cela que l'image est ouverte et fermée. Elle est ouverte dans C puisque x est une immersion équidimensionnelle. Elle est fermée car si $x(t_n)$ converge vers $x \in C$, pour n assez grand on a $x(t_n) \in \Phi_X(\{x\} \times I_X(x)$ puisque cet ensemble est un voisinage de x dans C. Donc $x(t_n) = \varphi_X^t(x_0) = \varphi_X^{u_n}(x)$, d'où $x = \varphi_X^{t_n - u_n}(x_0)$, cqfd.

(ii) La solution est définie sur $\mathbb{R}$ par le critère de prolongement. Comme elle est surjective, continue et ouverte comme application à valeurs dans C, elle n'est pas injective sinon ce serait un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur C. Donc elle est périodique.

5. Lemme de Morse. Applications aux intégrales premières en dimension 2

Théorème (lemme de Morse). *Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k avec $k \geq 3$ définie sur une sous-variété de dimension n. On suppose que f a en x_0 un point critique non-dégénéré (ou : de Morse), c'est-à-dire que $Df(x_0) = 0$ et que* $\text{Hess} f(x_0)$ *est non dégénérée. Soit i l'indice de* $\text{Hess} f(x_0)$*, alors il existe un paramétrage $\psi : (W \subset \mathbb{R}^n, 0) \to (V, x_0)$ de classe C^{k-2} tel que*

$$f \circ \psi(x_1, \cdots, x_n) = f(x_0) - \sum_{j=1}^{i} x_j^2 + \sum_{j=i+1}^{n} x_j^2.$$

Démonstration. On peut supposer que $V \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage de $0 = x_0$, et (quitte à faire un changement linéaire de coordonnées) que $\text{Hess} f(0)(x) = D^2 f(0)(x, x)$ est la forme quadratique

$$q(x_1, \cdots, x_n) = -2 \sum_{j=1}^{i} x_j^2 + 2 \sum_{j=i+1}^{n} x_j^2.$$

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a donc, pour x proche de 0,

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \frac{t^2}{2} D^2 f(tx)(x, x)\ dt = f(0) + \sigma(x)(x, x),$$

où $\sigma(x)$ est la forme bilinéaire symétrique $\sigma(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{2} D^2 f(tx)\ dt$, qui est une fonction C^{k-2} de x (cas particulier du lemme de division de Hadamard).

Identifiant $\sigma(x)$ avec sa matrice dans $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$, on a $\sigma(0) = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_i & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-i} \end{pmatrix}$. Nous allons trouver une application $\mu : (B^n(0, \varepsilon), 0) \to (\text{GL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{I}_n)$ de classe C^{k-2} telle que ${}^t\mu(x)\sigma(x)\mu(x) = \sigma(0)$. Pour cela, il suffit d'observer que l'application

$$M \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mapsto\ {}^tMS_0M \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$$

est une submersion de classe C^∞. Elle est donc linéarisable au voisinage de I_n, et en particulier, il existe une section $s : (U, 0) \to (\text{GL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{I}_n)$ de classe C^∞, telle que ${}^ts(S)S_0 s(S) = S$. Il suffit alors de poser $\mu(x) = s(S(x))^{-1}$.

Remarque. On peut aussi construire μ «à la main».

On a donc $f(x) = f(0) + \sigma(0)(\mu(x).x, \mu(x).x)$. L'application $\varphi : x \mapsto \mu(x).x$ est de classe C^{k-2} et $\varphi(0) = 0$, $D\varphi(0) = \mathrm{I}_n$, donc le théorème d'inversion locale donne un inverse $\psi : (W, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$. Finalement, on a

$$f(\psi(x)) = f(0) + \sigma(0)(x, x) = f(0) - \sum_{j=1}^{i} x_j^2 + \sum_{j=i+1}^{n} x_j^2,$$

cqfd.

Remarque. L'hypothèse de différentiabilité $k \geq 3$ et la perte de deux dérivées $k \to k-2$ ne sont pas optimales.

Corollaire. *(i) Si x_0 est un minimum non dégénéré (soit $i = 0$), il existe un voisinage U de x_0 et $\varepsilon > 0$ tels que les niveaux $f^{-1}(c) \cap U$ sont difféomorphes à S^{n-1} si $f(x_0) < c < f(x_0) + \varepsilon$. On a un énoncé analogue si x_0 est un maximum non dégénéré (soit $i = n$).*

(ii) Soit V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $X : V \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe C^1 ayant une intégrale première F de classe C^k, $k \geq 3$, (par exemple $X = X_F$, champ hamiltonien), ayant un extrémum non dégénéré en x_0. Alors toutes les orbites non constantes proches de x_0 sont périodiques. On dit que x_0 est un **centre**.

Remarque. La période des orbites n'est pas constante en général. Si $X = X_f$, on peut montrer qu'elle est constante (dans le cas d'un minimum) si et seulement si l'aire de $f^{-1}([f(x_0), f(x_0) + \varepsilon])$ est const.ε.

6. Fonctions de Liapounov

Définitions. Soit $X = U \to E$ un champ de vecteurs localement Lipschitz, et soit $F = U \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que F est une **fonction de Liapounov faible** si F décroît au sens large (ou : ne croît pas) le long de toute solution. Si F décroît strictement le long de toutes solution non constante, on dit que c'est une **fonction de Liapounov forte**.

Remarque. On trouve aussi les orthographes Liapounoff (articles originaux), Lyapounov, Lyapunov...

Proposition. *Supposons X différentiable.*

(i) La fonction F est une fonction de Liapounov faible si et seulement si $DF(X) \leq 0$.

(ii) C'est une fonction de Liapounov forte si $DF(X)$ ne s'annule pas sur $\mathrm{Reg}(X)$.

Démonstration. Ceci résulte immédiatement de la formule $\dot{F} = DF(X)$ et du fait qu'une solution non constante reste dans $\mathrm{Reg}(X)$.

Exemple. Soit $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs tel que $\langle X(x), x \rangle < 0$ si $x \neq 0$. Alors $F(x) = ||x||^2$ est une fonction de Liapounov forte.

Le critère de prolongement implique immédiatement la :

Proposition. *Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs localement Lipschitz, ayant une fonction de Liapounov faible F. Si les sous-niveaux $F^{\leq c} = \{x \in U \mid F(x) \leq c\}$ sont compacts, toute orbite est définie sur $\mathbb{R}_+$.*

Exemples. Si E est muni d'une norme quelconque, celle-ci est à sous-niveaux compacts puisque E est de dimension finie. Donc un champ de vecteurs localement Lipschitz sur $\mathbb{R}^n$ tel que $\langle X(x), x \rangle \leq 0$ a des orbites définies sur $\mathbb{R}_+$.

7. Stabilité, stabilité asymptotique

Définitions Soit $X : U \to E$ un champ de vecteurs localement Lipschitz, et soit $x_0 \in U$ un point singulier de X. Il est **stable** si pour tout voisinage V de x_0 il existe un sous-voisinage W tel que, pour tout $x \in W$, $\varphi_X^t(x)$ est défini pour $t \geq 0$ et reste toujours dans V.

Remarque. Si V est relativement compact dans U, il suffit que $\varphi_X^t(x)$ reste dans V pour tout $x \in W$ et tout $t \in I_X(x) \cap [0, +\infty[$. C'est le cas en particulier si V est positivement invariant par le flot : donc x_0 est stable dès qu'il existe un système fondamental de voisinages positivement invariants par le flot.

Il est **instable** s'il n'est pas stable, autrement dit s'il existe un voisinage V de x_0 tel que tout voisinage f de x_0 contient un point x dont l'orbite $(\varphi_X^t(x))$ sort de V pour un certain temps $t > 0$.

Il est **asymptotiquement stable** s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $\varphi_X^t(x)$ est défini pour tout $x \in V$ et tout $t \geq 0$, et $\lim_{t\to+\infty} \varphi_X^t(x) = x_0$ uniformément sur V. Autrement dit, pour tout voisinage W de x_0 il existe $T = T(W)$ tel que $\varphi_X^t(V) \subset W$ pour $t \geq T$.

Remarques. 1) Si V est relativement compact et positivement invariant par le flot, il suffit de prouver que $\bigcap_{t\geq 0} \varphi_X^t(V) = \{x_0\}$. En effet, si $W \subset$ est un voisinage ouvert, on a $\bigcap_{t\geq 0} \varphi_X^t(V) \cap (V \setminus W) = \emptyset$, donc par compacité et décroissance des $\varphi_X^t(V)$, il existe $T > 0$ tel que $\varphi_X^t(V) \cap (V \setminus W) = \emptyset$ soit $\varphi_X^t(V) \subset W$.

2) Si x_0 est asymptotiquement stable pour X, on dit aussi que x_0 est un **puits** pour X, et une **source** pour $-X$.

La proposition suivante est l'outil le plus utile pour prouver la stabilité (surtout asymptotique) d'un point singulier.

Proposition. *Soit x_0 un point singulier d'un champ de vecteurs localement Lipschitz.*

(i) On suppose qu'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction de Liapounov faible $F : V \to [0, +\infty[$ ayant un minimum strict en x_0. Alors x est stable.

(ii) On suppose de plus que F est une fonction de Liapounov forte et que x_0 est isolé comme point singulier. Alors x_0 est asymptotiquement stable.

Démonstration. Soit $\delta > 0$ tel que $B'(x, \delta) \subset V$, et soit

$$\varepsilon_0 = \min_{B'(x_0,\delta)\setminus B(x_0,\delta/2)} F > 0$$

(il faut prendre la couronne $B'(x_0, \delta) \setminus B(x_0, \delta/2)$ et non la sphère $S(x_0, \delta/2)$). Alors pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, on a

$$V_\varepsilon := F^{-1}([0, \varepsilon]) \cap B(x, \delta) = F^{-1}([0, \varepsilon]) \cap B'(x, \delta/2),$$

donc V_ε est compact.

(i) Comme $\bigcap_\varepsilon V_\varepsilon = \{x_0\}$ puisque x_0 est un minimum strict, les V_ε forment une base de voisinages compacts de x. Chaque V_ε est positivement invariant par le flot, donc x_0 est stable d'après la remarque ci-dessus.

(ii) Quitte à diminuer U on peut supposer que X ne s'annule pas sur $U \setminus \{x_0\}$. Posons $K = \bigcap_{t\in[0,+\infty[} \varphi_X^t(V_{\varepsilon_0})$, il s'agit de montrer que $K = \{x_0\}$. Comme V_{ε_0} est positivement invariant par le flot, on a $\varphi_X^t(K) = K$ pour tout $t \geq 0$, donc

$$\max_K F = \max_K F \circ \varphi_X^1.$$

Or, si $x \neq x_0$ on a $X(x_0) \neq 0$ donc $F(\varphi_X^t(x)) < F(x)$ si $t > 0$. Donc, si K n'est pas réduit à x_0, on a

$$\max_K F \circ \varphi_X^1 < \max_K F,$$

contradiction.

Comme corollaire, on en déduit une condition suffisante de stabilité asymptotique en fonction du spectre de $DX(x_0)$. On a aussi une condition nécessaire de stabilité :

Proposition (stabilité et spectre de $DX(x_0)$). *Soit x_0 un point singulier de X, champ de vecteurs de classe C^1.*

(i) Supposons que le spectre de $DX(x_0)$ est stable, c'est-à-dire contenu dans $\{\mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$*. Alors x_0 est asymptotiquement stable.*

(ii) Supposons que $DX(x_0)$ a du spectre instable, c'est-à-dire que $\mathrm{Spec}(DX(x_0))$ *rencontre* $\{\mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$*. Alors x_0 est instable.*

Démonstration.

(i) D'après l'hypothèse, il existe un produit scalaire et une constante $C > 0$ tels que

$$(\forall v \in E) \qquad (DX(x_0).v, v) \leq -C||v||^2.$$

Comme $X(x) = DX(x_0).(x - x_0) + o(||x||)$, pour $||x - x_0||$ assez petit on a

$$(X(x), x - x_0) \leq -\frac{C}{2}||x - x_0||^2.$$

Posant $F(x) = ||x - x_0||^2$, on a donc $DF(X) \leq -CF$. On peut appliquer le critère précédent, ou plus simplement observer que ceci implique $||\varphi_X^t(x) - x_0|| \leq e^{-Ct/2}||x - x_0||$, ce qui prouve clairement que x_0 est asymptotiquement stable.

(ii) On peut supposer $x_0 = 0$. Posons $A = DX(0)$, on a une décomposition A-invariante $E = E_+ \oplus F$ avec $E_+ \neq 0$, $\mathrm{Spec}(A|E_+) \subset \{\mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$ et $\mathrm{Spec}(A|F) \subset \{\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0\}$. On identifie $E = E_+ \times F$, un élément de e sera écrit $x = (u, v)$.

Il existe $C > 0$ et un produit scalaire sur E_+ tels que $(Au, u) \geq C||u||^2$ sur E_+. Par ailleurs, le spectre de $(A - \frac{C}{4}\mathrm{Id})|F$ est contenu dans $\{\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0\}$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un produit scalaire sur F tel que $(Av, v) \leq \varepsilon||v||^2$ sur F. Appliquons cela avec $\varepsilon = \frac{C}{4}$, il vient

$$(Au, u) - (Av, v) \geq C||u||^2 - \frac{C}{4}||v||^2.$$

Munissons E du produit scalaire somme. Définissons $G(x) = G(u, v) = ||u||^2 - ||v||^2$. Alors

$$DG(x).X(x) = 2(A.u, u) - 2(A.v, v) + o(||(u, v)||^2),$$

donc pour $||x|| \leq \delta$ assez petit on a

$$\begin{aligned} DG(x).X(x) &\geq C||u||^2 - \frac{C}{4}||v||^2 - \frac{C}{4}(||u||^2 + ||v||^2) \\ &\geq \frac{C}{2}(||u||^2 - ||v||^2) = \frac{C}{2}G(x). \end{aligned}$$

Soit $u_0 \in E_+$ tel que $0 < ||u_0|| < \delta$. Alors $G(u_0, 0) = ||u_0||^2 > 0$, donc tant que $\varphi_X^t(u_0, 0)$ est défini on a

$$G(\varphi_X^t(u_0, 0)) \geq e^{Ct/2} G(u_0, 0) = e^{Ct/2} ||u_0||^2.$$

Ceci prouve que l'orbite $\varphi_X^t(u_0, 0)$ sort de $B(0, \delta)$ en un temps positif fini. Comme u_0 est arbitrairement petit, le point 0 est instable.

Remarque. Noter qu'on peut estimer le temps T que met $\varphi_X^t(u_0, 0)$ à sortir de $B(0, \delta)$: on a $T \leq 2C^{-1} \log \dfrac{\delta}{||u_0||}$.

Remarque. Si $\mathrm{Spec}(DX(x_0))$ est contenu dans $\{\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0\}$ et rencontre $i\mathbb{R}$, on ne peut rien dire sans information supplémentaire : on peut avoir stabilité asymptotique, stabilité mais pas stabilité asymptotique, instabilité.

8. Étude des points singuliers en dimension deux.

Dans ce chapitre, E est un plan (espace vectoriel réel de dimension 2), et $X : U \to E$ un champ de vecteurs de classe C^1, ayant en x un point singulier. Nous classifions les différents types de points singuliers suivant les propriétés spectrales de DX_x.

1. Points singuliers hyperboliques. Théorème de linéarisation de Hartman

Définition. Soit X un champ de vecteurs C^1 en dimension finie, ayant en x_0 un point singulier. Le point x_0 est **hyperbolique** si $DX(x_0) = A$ est hyperbolique, c'est-à-dire n'a pas de valeur spectrale imaginaire pure.

Nous **admettrons** le résultat suivant (cf [Demazure], pp 236sqq]).

Théorème de linéarisation de Hartman. *Soit $X : U \subset E \to E$, où E est de dimension finie, un champ de vecteurs de classe C^1, ayant un point singulier hyperbolique x_0.*

1) En toute dimension, X est **topologiquement linéarisable** *en x_0, c'est-à-dire : il existe*

- un voisinage U de x_0 dans E

- un voisinage U_1 de 0 dans E

- un homéomorphisme $\Phi : (U, x) \to (U_1, 0)$

tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Phi} & U_1 \\ \varphi_X^t \big\downarrow & & \big\downarrow e^{tA} \\ U & \xrightarrow{\Phi} & U_1 \end{array}$$

Autrement dit :

$$\varphi_X^t(x) = \Phi^{-1}(e^{tA}\Phi(x))$$

si l'un des deux membres a un sens (l'autre membre ayant alors aussi un sens).

2) Si $\dim(E) = 2$ et X est de classe C^2, Φ peut être pris de classe C^1. On dit alors que X est **C^1-linéarisable** *en x_0.*

3) (Sternberg) Si $\dim(E) = 2$ et si les valeurs propres de $DX(x_0)$ sont non nulles et telles que $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$, Φ peut être pris de classe C^∞, on dit alors que X est **C^∞-linéarisable** *en x_0.*

Définition. L'homéomorphisme (ou difféomorphisme) Φ s'appelle une **conjugaison** de X à sa partie linéaire.

Commentaires sur la preuve et la différentiabilité de la conjugaison (cf. [Demazure, p. 262 sqq], et [Chaperon]) :

1) On peut supposer que X est défini sur E tout entier, et $X(x) = DX(x_0).(x - x_0)$ hors d'un compact (on remplace X par $\rho X + (1 - \rho DX(x_0))(x - x_0)$ où ρ est une fonction plateau). Une conjugaison C^0 s'obtient en appliquant à $\varphi = \varphi_X^t$ $(t \neq 0)$ le

Théorème de linéarisation globale. *Soit $A \in \mathrm{GL}(E)$ un automorphisme hyperbolique, c'est-à-dire* $\mathrm{Spec}(A) \cap \mathbb{U} = \emptyset$. *Il existe $\varepsilon(A) > 0$ avec la propriété suivante. Si φ est un homéomorphisme lipschitzien de E tel que $\varphi - A$ est borné et* $\mathrm{Lip}(\varphi - A) < \varepsilon(A)$, *il existe une unique conjugaison Lipschitz $h = \mathrm{Id} + u : E \to E$ de φ à A.*

Ce dernier résultat se trouve en cherchant $u \in C^0_b(E, E)$ comme point fixe d'une contraction.

2) L'obstruction à avoir une conjugaison au moins C^1 est dûe aux **résonances** de $DX(x_0)$. Par définition, une **résonance d'ordre** k est une relation $\lambda_i = \sum_{j=1}^n k_i \lambda_j$ entre les valeurs propres de $DX(x_0)$, avec $k_j \in \mathbb{N}$, $\sum_j k_j = k \geq 2$.

Exercice. (i) Montrer que $X(x, y) = (x, 2y + x^2)$ est C^1-linéarisable, mais pas C^2-linéarisable en 0.

(ii)* Soit $A \in \mathrm{L}(E)$ ayant une résonance d'ordre k. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs polynomial X_0 de degré k qui n'est pas C^k-linéarisable en 0, et que tout champ X de classe C^k ayant le même développement de Taylor que X à l'ordre k est non C^k-linéarisable en 0.

3) On peut aussi avoir non-ilnéarisabilité C^1 :

- (Irwin) Si $X(x, y, z) = (x, -y, z + txy)$, X n'est pas C^1-linéarisable, ni même Lipschitz-linéarisable en 0. Noter que X est C^∞ et même analytique réel.
- Si $E = \mathbb{C}$ et $X(z) = -z - i\dfrac{z}{\log |z|}$ sur $\mathbb{C}$, avec $X(0) = 0$. Alors X est de classe C^1, $DX(0) = -\mathrm{Id}$, mais (exercice) en travaillant en coordonnées polaires on voit que les solutions non nulles spiralent autour de zéro, donc qu'on ne peut avoir une conjugaison C^1. [ceci contredit [Demazure], Théorème VIII-11.3 et VIII-11.4, p266-267]. Je soupçonne que X n'est pas non plus Lipschitz-linéarisable.

4) Le théorème (difficile) de Sternberg se généralise en dimension quelconque, sous l'hypothèse que $DX(x_0)$ n'a pas de résonance du tout.

Dans les sections suivantes, X est un champ de vecteurs de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^2$, ayant un point singulier en x_0. Nous allons décrire qualitativement le flot de X au voisinage de x_0, en distinguant plusieurs cas suivant la réalité, le signe et la multiplicité des valeurs propres.

2. Foyers

Définition. Le point x_0 est un **foyer** si $DX(x_0)$ a deux valeurs propres complexes conjuguées non réelles et non imaginaires pures, autrement dit si sa matrice dans une base convenable est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, a et $b \neq 0$. En notation complexe $E = \mathbb{C}$, ceci s'écrit $DX(x_0) = (a + ib)\mathrm{Id}$. Il est **attractif** si $a < 0$, soit $\mathrm{tr}(A) < 0$, et **répulsif** si $a > 0$, soit $\mathrm{tr}(A) > 0$.

Étude d'un foyer attractif pour $t \to +\infty$. On a alors stabilité asymptotique, en fait il existe une norme euclidienne telle que $||x - x_0||$ est une fonction de Liapounov forte donc décroît strictement vers 0 le long des orbites près de x_0.

Pour avoir une description plus précise, on étudie d'abord le flot linéaire, dont les orbites sont $z(t) = e^{a+ibt}z(0)$: pour $t \to +\infty$, les orbites non constantes **spiralent autour de zéro** au sens suivant : l'argument $\theta(t) = bt + \theta(0)$ tend de façon strictement monotone vers $\pm\infty$ suivant le signe de b, et de même pour l'argument du vecteur dérivé $z'(t) = (a + ib)z(t)$, qui vaut $\arg(a + ib) + \theta(t)$

En utilisant le théorème de théorème de Hartman, on en déduit que si X est de classe C^2, ses orbites non constantes et partant assez près de x_0 spiralent autour de x_0 pour $t \to +\infty$.

Remarque. En fait, même si X n'est que de classe C^1, on peut voir que les orbites non constantes du flot non linéaire spiralent toujours (en un sens légèrement plus faible). En effet, il suffit d'étudier la variation de l'argument $\theta(t)$ le long d'une telle orbite :

$$\theta'(t) = \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2} = b + o(1).$$

donc $\theta(t)$ tend vers $\pm\infty$, de façon strictement monotone pour t assez grand. Et de même $\arg(z'(t)) = \arg(a + ib) + \theta(t) + o(1)$, donc cet argument tend vers $\pm\infty$. Si X n'est que C^1, il n'est pas sûr que ce soit de façon strictement monotone, mais ça ne change guère le dessin.

3. Nœuds

Définition. Le point x_0 est un **nœud** si $\mathrm{Spec}(DX(x_0))$ est contenu dans $]-\infty, 0[$ ou dans $]0+\infty[$. Ceci équivaut à $\mathrm{tr}(A)^2 \geq 4\ \det(A)$. Le nœud est **attractif** si $\mathrm{Spec}(A) \subset]-\infty, 0[$, soit $\mathrm{tr}(A) < 0$, **répulsif** si $\mathrm{Spec}(A) \subset]0+\infty[$, soit $\mathrm{tr}(A) > 0$.

Si $A = a\ \mathrm{Id}$, on a un **nœud propre**, sinon il est **impropre**.

Étude du flot. Comme pour les foyers, nous étudions le cas attractif, avec $t \to +\infty$. Ici encore, il existe une norme euclidienne telle que $||x - x_0||^2$ est une fonction de Liapounov stricte, donc x_0 est asymptotiquement stable.

Étude du flot linéaire.

a) Si le nœud est propre, soit $DX(x_0) = a\ \mathrm{Id}$ avec $a < 0$, les orbites du flot linéaire sont $e^{at}v$. Donc celles qui sont non constantes ont pour images les demi-droites vectorielles. Elles partent de l'infini et aboutissent à l'origine.

Flot non linéaire. Supposons X de classe C^2 et appliquons Hartman. Les orbites arrivant à 0 peuvent s'écrire

$$\varphi_v(t) = \Phi^{-1}(e^{at}\varepsilon v)\ ,\ ||v|| = 1,$$

si ε est assez petit. Donc le vecteur tangent unitaire est

$$\frac{\varphi_v(t)}{||\varphi_v(t)||} = D(\Phi^{-1})_{\varphi_v(t)}(-v),$$

qui tend vers $-v$ quand t tend vers $+\infty$. Donc chaque orbite a une direction tangente limite, et il y a exactement (à reparamétrage près) une orbite de direction limite donnée.

Remarque. Cette fois, si X n'est que de classe C^1 les orbites peuvent ne pas avoir de direction limite, par exemple spiraler comme dans l'exemple déjà vu $X(x, y) = -z - \dfrac{iz}{\log|z|}$.

b) Si le nœud est impropre, il y a deux possibilités (dans une base convenable) :

(i) $DX(x_0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a < b < 0$.

(ii) $DX(x_0) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a < 0$.

Dans le cas (i) les orbites du flot linéaire sont $(e^{at}u, e^{bt}v)$. Elles ont toutes une direction tangente limite, qui vaut $(\pm 1, 0)$ [espace propre associé à la plus grande valeur propre en module] sauf pour les orbites $(0, \pm e^{bt})$ qui donnent $(0, \mp 1)$ [espace propre associé à la plus petite valeur propre en module].

Dans le cas (ii), les orbites du flot linéaire sont

$$(e^{at}(x(0)+ty(0)), e^{at}y(0))).$$

Elles ont toutes une direction tangente limite [dans l'espace propre], qui est

- $(-1,0)$ si $y(0)>0$ ou $(y(0)=0, x(0)>0)$,
- $(1,0)$ si $y(0)<0$ ou $(y(0)=0, x(0)<0)$.

Étude du flot non linéaire. Si X est de classe C^2, les orbites du flot non linéaire ont les mêmes propriétés par le théorème de Hartman.

4. Col, ou point-selle

Définition. Le point x est un **col**, ou **point-selle**, si $\mathrm{Spec}(DX(x_0))$ est formé de deux nombres réels de signes opposés.

Donc dans une base convenable on a $DX(x_0)=A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a<0<b$.

Les orbites du flot linéaire sont $(e^{at}x(0), e^{bt}y(0))$. Elles vérifient $x^b y^{-a}=\text{cste}$. Si $\dfrac{-a}{b}=\dfrac{p}{q}$ est rationnel, on a donc une intégrale première $x^q y^p$ qui est de classe C^∞.

Toutes les orbites non constantes sauf quatre vont de l'infini à l'infini. Les quatre orbites particulières sont

- $(\pm e^{at}, 0)$, qui vont de l'infini à l'origine.
- $(0, \pm e^{bt})$, qui vont de l'origine à l'infini.

Flot non linéaire. Appliquons le théorème de Hartman. Alors pour V voisinage de x assez petit, toute orbite issue de $V\setminus\{0\}$ sort de V pour $t\to\pm\infty$, sauf quatre orbites exceptionnelles :

• Les deux **séparatrices stables** $\Phi^{-1}(\pm e^{at}, 0)$, qui tendent vers x en $+\infty$ et sortent de V pour un $t<0$

• Les deux **séparatrices insstables** $\Phi^{-1}(0, \pm e^{bt})$, qui sortent de V pour un $t>0$ et tendent vers 0 en $-\infty$.

Si de plus X est de classe C^2, la direction tangente limite en x des deux séparatrices stables est $(\mp 1, 0)$, celle des deux séparatrices instables est $(0, \pm 1)$.

Remarques. 1) En fait, si X n'est que C^1 l'énoncé sur la tangente limite des séparatrices reste vrai de sorte que l'union des deux séparatrices stables et de x_0 est une sous-variété (courbe) de classe C^1, la **variété stable locale**. Si X est de classe C^k avec $k\geq 2$, alors cette variété stable est de classe C^∞. Plus généralement, si $DX(x_0)$ est hyperbolique soit $\mathrm{Spec}(DX(x_0))\cap i\mathbb{R}=\emptyset$, on peut définir la variétés stable locale par

$$W^s_{loc}(X,x_0)=\{x\in U \mid (\forall t\geq 0)\ \varphi^t_X(x)\in U \text{ et } \lim_{t\to+\infty}\varphi^t_X(x)=x_0\},$$

où U est un voisinage de x_0 assez petit. On peut montrer que c'est une sous-variété de la même différentiabilité que X, d'espace tangent

$$T_{x_0}W=E^s_{DX(x_0)}=\{v\in E \mid \lim_{t\to+\infty} e^{tDX(x_0)}v=0\}.$$

2) Le théorème de Hartman donne l'intégrale première locale $(x^b y^{-a})\circ\Phi$. Souvent, une intégrale première équivalente peut être trouvée sans le théorème de Hartman, par exemple dans le cas hamiltonien.

5. Points singuliers non hyperboliques. Centres.

Dans le cas où $A = DX(x_0)$ n'est pas hyperbolique, on ne peut rien dire sur le flot local de X sans information supplémentaire : on peut avoir stabilité asymptotique, stabilité mais pas asymptotique, instabilité.

Le cas qui se présente le plus souvent est celui où $\mathrm{Spec}(DX(x_0))$ est imaginaire pur, donc le flot linéaire est isométrique : dans une base convenable,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = ib \ , \ e^{tA}z = e^{itb}z.$$

Le plus souvent, il y a alors

• soit une fonction de Liapounov stricte sur $V \setminus \{0\}$, en général $\pm||x - x_0||^2$ convient pour une norme euclidienne convenable. On a alors stabilité asymptotique pour $\pm X$.

• soit une intégrale première, ayant en x un minimum non dégénéré. On dit alors qu'on a un **centre**. D'après le lemme de Morse, les orbites non constantes proches de x sont périodiques.

Ce cas se présente essentiellement quand le champ est hamiltonien.