Rang — Modèles locaux

Exercice 1.— Décomposition par rang.

(a) Quelle est l'adhérence dans $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ de $\left\{\mathrm{M}\in\mathrm{M}(n,\mathbb{R})\;\middle|\;\operatorname{rg}\mathrm{M}=r\right\}$?

(b) Dessiner la partition de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} x & y+z\\ y-z & -x\end{pmatrix}\;\middle|\;(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$ en matrices de rang 0, 1 et 2.

(c) Dans $\mathrm{M}(2,\mathbb{R})$, quelle est la mesure de Lebesgue de $\left\{\mathrm{M}\in\mathrm{M}(2,\mathbb{R})\;\middle|\;\operatorname{rg}\mathrm{M}<2\right\}$?

(d) Montrer que l'ensemble $\left\{\mathrm{M}\in\mathrm{M}(n,\mathbb{R})\;\middle|\;\operatorname{rg}\mathrm{M}=n-1\right\}$ est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^{n^2-1}$.

(e) Plus généralement, montrer que l'ensemble $\mathrm{R}_r=\left\{\mathrm{M}\in\mathrm{M}(n\times m,\mathbb{R})\;\middle|\;\operatorname{rg}\mathrm{M}=r\right\}$ est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^{nm-(n-r)(m-r)}$. On pourra démontrer et utiliser le fait que, si $\mathrm{A}\in\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$, les matrices de $\mathrm{M}(n\times m,\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\mathrm{I}_r & 0\\ \mathrm{CA}^{-1} & \mathrm{D}-\mathrm{CA}^{-1}\mathrm{B}\end{pmatrix}$ sont équivalentes.

Exercice 2.— Calculs de différentielles.

(a) Montrer que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$. Montrer que la fonction suivante est continûment différentiable et calculer sa différentielle :

$$\varphi:\begin{array}{ccc}\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}(n,\mathbb{R})\\ \mathrm{M} & \mapsto & \mathrm{M}^{-1}\end{array}.$$

(b) Pour $\mathrm{A}\in\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$, on pose

$$\psi_{\mathrm{A}}:\begin{array}{ccc}\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}(n,\mathbb{R})\\ \mathrm{M} & \mapsto & \mathrm{MAM}^{-1}\end{array}.$$

Calculer la différentielle de ψ_{A}. Montrer que ψ_{A} est de rang constant.

(c) Déterminer $\dim\ker d_{\mathrm{M}}\psi_{\mathrm{A}}$ dans le cas où les valeurs propres de A sont réelles et distinctes.

(d) Montrer que si A est une matrice symétrique inversible de taille n, l'application suivante est une submersion en tout point de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

$$\theta_{\mathrm{A}}:\begin{array}{ccc}\mathrm{M}(n,\mathbb{R}) & \to & \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})\\ \mathrm{M} & \mapsto & {}^t\mathrm{MAM}\end{array}.$$

Exercice 3.— Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ une injection continûment différentiable. Montrer que c'est une immersion sur un ouvert dense (et justifier qu'en général, ce n'est pas une immersion sur U tout entier).

Exercice 4.— **Formes modèles en dimension 1.** Soit $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que toutes les dérivées ne s'annulent pas en 0. Montrer qu'il existe deux voisinages V, W de 0 et un difféomorphisme $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ tels que $f \circ \varphi(x) = \pm x^m$, pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.— **Lemme de Morse en dimension 2.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant 0 et $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{U}, \mathbb{R})$. On suppose que $d_0 f = 0$ et que la différentielle seconde $d_0^2 f$ est une forme quadratique non dégénérée.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{C}^1(\mathrm{U}, \mathbb{R})$ tels que

$$f(x, y) = f(0, 0) + \alpha(x, y)x^2 + 2\beta(x, y)xy + \gamma(x, y)y^2.$$

(b) On suppose ici que la forme quadratique $d_0^2 f$ est de signature $(+-)$. Démontrer qu'il existe un voisinage de l'origine V et $u, v \in \mathrm{C}^1(\mathrm{V}, \mathbb{R})$ tels que, pour $(x, y) \in \mathrm{V}$,

$$f(x, y) = f(0, 0) + u(x, y)^2 - v(x, y)^2$$

et que l'application $(x, y) \mapsto (u, v)$ est un difféomorphisme $\varphi : \mathrm{V} \to \varphi(\mathrm{V})$.

(c) Comment adapter ces résultats dans les cas des signatures $(++)$ et $(--)$?