Immersions — Plongements

Exercice 1.— La projection stéréographique. Soit S^{n-1} la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. On identifie $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ à $\mathbb{R}^{n-1}$. On note N (resp. S) le point de coordonnées $(0, \cdots, 0, 1)$ (resp. $(0, \cdots, 0, -1)$) dans $\mathbb{R}^n$ et on définit les applications :

$$p_{\mathrm{N}} : \begin{cases} \mathrm{S}^{n-1} - \{\mathrm{N}\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ x \longmapsto (\mathrm{N}x) \cap \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$$

et

$$p_{\mathrm{S}} : \begin{cases} \mathrm{S}^{n-1} - \{\mathrm{S}\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ x \longmapsto (\mathrm{S}x) \cap \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$$

1. Exprimer $p_{\mathrm{N}}(x_1, ..., x_n)$ (resp. $p_{\mathrm{S}}(x_1, ..., x_n)$) en coordonnées cartésiennes pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathrm{S}^{n-1} - \{\mathrm{N}\}$ (resp. $\mathrm{S}^{n-1} - \{\mathrm{S}\}$).
2. Exprimer p_{N}^{-1} et p_{S}^{-1} en coordonnées cartésiennes. En déduire que p_{N} et p_{S} sont des cartes de S^{n-1}.
3. Calculer $p_{\mathrm{S}} \circ p_{\mathrm{N}}^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} - \{0\} \to \mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$. Vérifier que c'est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$.

Exercice 2.— Le ruban de Möbius. Dans $\mathrm{P}_0 := \{y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, on note $\mathrm{S}_0 = \{(x, 0, z); x = 2, z \in]-1, 1[\}$. On note $\mathrm{R}_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz), $r_\theta : \mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_0$ la rotation d'angle θ autour du point $(2, 0, 0)$, et on définit $\mathrm{S}_\theta = \mathrm{R}_\theta \circ r_{\frac{\theta}{2}}(\mathrm{S}_0)$. On appelle *ruban* ou *bande de Möbius* l'ensemble

$$\mathrm{M} = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi[} \mathrm{S}_\theta$$

.

1. Trouver une immersion $f : \mathbb{R} \times]-1, 1[\to \mathbb{R}^3$ d'image M. Déterminer un sous-ensemble de $\mathbb{R} \times]-1, 1[$ sur lequel f est injective.
2. Montrer que f induit un homéomorphisme $\tilde{f} : (\mathbb{R} \times]-1, 1[) \big/ \mathbb{Z} \to \mathrm{M}$ où $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R} \times]-1, 1[$ par $n \cdot (\theta, t) = (\theta + 2n\pi, (-1)^n t)$.
3. (a) Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \to \big(\mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_- \times \{0\})\big) \times \mathbb{R} \\ (r, \theta, z) \mapsto (r \cos\theta, r \sin\theta, z) \end{cases}$$

est un difféomorphisme.

(b) Trouver une équation implicite de $\mathrm{M} - \mathrm{P}_\pi$ de la forme $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$ avec F définie au voisinage de $\mathrm{M} - \mathrm{P}_\pi$.

(c) Montrer que F est une submersion en un point p si et seulement si $\tilde{\mathrm{F}} = \mathrm{F} \circ \Phi$ est une submersion en $\Phi^{-1}(p)$. Conclure que F est une submersion en tout point de $\mathrm{M} - \mathrm{P}_\pi$ et que $\mathrm{M} - \mathrm{P}_\pi$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ en tout point.

(d) Montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.— Vers les variétés projectives. Soit P un polynôme homogène à $n+1$ variables sur $\mathbb{R}$ tel que les $\partial_i \mathrm{P}$ n'aient aucun zéro commun autre que 0 (par exemple $\mathrm{P}(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i^k$). Montrer que l'intersection de la sphère unité et de $\mathrm{P}^{-1}\{0\}$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 4.— L'hélicoïde droit. On considère l'hélice circulaire, d'équation paramétrique :

$$t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$$

dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que la surface engendrée par l'ensemble des droites qui rencontrent l'hélice et rencontrent orthogonalement l'axe Oz est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.— Quelques plongements. Donner un exemple de plongement (topologique) de $\mathrm{T}^3 = \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$ dans $\mathbb{R}^4$; de $\mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^2$ dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 6.— La « fronce ». On considère dans $\mathbb{R}^3$ le sous-ensemble

$$\mathrm{S} = \{(x, p, q) \in \mathbb{R}^3 / x^3 + px + q = 0\}.$$

1. Montrer que S est une surface lisse de $\mathbb{R}^3$ et déterminer son plan tangent à l'origine.
2. Soit C l'ensemble des points y de S où $\mathrm{T}_y\mathrm{S}$ est parallèle à l'axe des x. Montrer que c'est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine et déterminer sa tangente à l'origine.
3. Dessiner le lieu des zéros, dans $\mathbb{R}^2$, du *discriminant* $\Delta(p, q) = 4p^3 + 27q^2$ (ensemble des valeurs de (p, q) pour lesquelles le polynôme du troisième degré a une racine multiple). Quel lien y a-t-il entre ce lieu et la courbe C ?
4. Esquisser la surface S dans $\mathbb{R}^3$ et retrouver géométriquement la signification algébrique du discriminant.

Exercice 7.— Le fibré tangent. Montrer que si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des couples (x, v) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tels que $x \in \mathrm{M}$ et v est tangent à M en x est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.