Calcul différentiel sur les sous-variétés

Exercice 1.— Application différentiable sur une sous-variété. Soit $\mathrm{V} \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de classe C^k et soit f une application de V dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que f est différentiable en un point x de V si et seulement s'il existe F définie sur un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, différentiable et telle que $\mathrm{F}|\mathrm{V} \cap \mathrm{U} = f$.

Exercice 2.— Sous-variétés difféomorphes. Montrer que la sous-variété $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ est difféomorphe au tore de révolution $\mathrm{T} \subset \mathbb{R}^3$ engendré par la rotation du cercle vertical de centre $(2, 0, 0)$ et de rayon 1 autour de l'axe des z.

Exercice 3.— Minimum d'une fonction sur une sous-variété. Soit U le produit $]0, \infty[^3 \subset \mathbb{R}^3$ et f, g, h les fonctions définies sur U par :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \\ g(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \text{ et} \\ h(x, y, z) &= x - y - z\,. \end{aligned}$$

1. Montrer que les zéros communs à g et h forment une sous-variété M de $\mathbb{R}^3$. Pour tout point de M, donner un vecteur tangent à M en ce point.
2. Montrer que f admet un unique minimum sur M.

Exercice 4.— Fonctions de Morse. On note toujours T le tore de révolution décrit précédemment et on définit les fonctions $f = x|\mathrm{T}$ et $g = z|\mathrm{T}$. Trouver leurs points critiques. Sont-ils de Morse ? Si oui quels sont leurs indices ?