Équations différentielles

Exercice 1.— Flot unitaire. On considère l'équation différentielle linéaire (pour une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$.

$$\dot{x} = \mathrm{A} \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Toute solution est bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(ii) Il existe C tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \|e^{t\mathrm{A}}\| \leqslant \mathrm{C}$.

(iii) $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}) \subset i\mathbb{R}$ et A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

(iv) Il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, \mathrm{A} \cdot x \rangle = 0$.

(v) Il existe un produit scalaire pour lequel $e^{t\mathrm{A}}$ est unitaire.

Exercice 2.— Équations de Sturm–Liouville. On étudie les équations du type

$$u'' + \mathrm{P}(x)u' + \mathrm{Q}(x)u = 0 \tag{1}$$

ou, de manière équivalente (comme on le verra dans la suite), du type

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

avec P, Q, des fonctions lisses de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Généralités

(a) Si u_1 et u_2 sont deux solutions de (1), on définit le *wronskien* $\mathrm{W}(u_1, u_2) = u_1 u_2' - u_1' u_2$. Montrer que u_1 et u_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si le wronskien ne s'annule pas.

(b) En déduire que deux solutions indépendantes ne peuvent avoir de zéro commun.

(c) Montrer que pour résoudre une équation du type (1), on peut toujours se ramener à une équation du type (2) (en posant $u = y\varphi$).

Cas particulier

Quelles sont les solutions dans le cas où $q \equiv -a^2$, $a \in \mathbb{R}$, ayant pour conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 1$ et $y(0) = 1, y'(0) = 0$?

Remarque. Ceci permet de donner une définition des fonctions trigonométriques qui permet aisément d'en retrouver de nombreuses propriétés qualitatives.

Oscillations

(a) Montrer que toute solution de (2) non identiquement nulle admet un nombre fini de zéros sur tout intervalle compact.

(b) On suppose $q < 0$. Montrer que toute solution non identiquement nulle de (2) a au plus un zéro.

(c) On suppose $q > 0$ non intégrable. Montrer que toute solution de (2) a une infinité de zéros. On pourra poser $v = -\dfrac{y'}{y}$.

(d) Soit y_1 et y_2 des solutions linéairement indépendantes de (2). Montrer qu'entre deux zéros successifs de y_1 il y a exactement un zéro de y_2.

(e) Soit y une solution de $y'' + q(x)y = 0$ et z une solution de $z'' + r(x)z = 0$ avec $q > r$. Montrer que y s'annule au moins une fois entre deux zéros successifs de z.

(f) On suppose qu'il existe m et M dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, m^2 < q(x) < \mathrm{M}^2$. Montrer que deux zéros successifs x_1 et x_2 vérifient $\dfrac{\pi}{\mathrm{M}} < |x_2 - x_1| < \dfrac{\pi}{m}$.

Exercice 3.— Équations de Hamilton–Jacobi. On note $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ les coordonnées d'un point z dans $\mathbb{R}^{2n}$. Pour une fonction (*le hamiltonien*) $\mathrm{H} \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, on considère le système d'équations différentielles :

$$\text{(HJ)} \qquad \dot{x}_i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_i} \qquad \dot{y}_i = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}.$$

On rappelle que le groupe symplectique est $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \left\{ \mathrm{M} \in \mathrm{M}(2n, \mathbb{R}) \;\middle|\; {}^t\mathrm{MJM} = \mathrm{J} \right\}$, où J est la matrice composée de n blocs diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note également $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ l'espace tangent à $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ en id.

(a) Montrer que $\mathrm{A} \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, e^{t\mathrm{A}} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'équation linéaire $\dot{z} = \mathrm{A} \cdot z$ est une équation (HJ) pour un certain H si et seulement si $\mathrm{A} \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$.

(c) Montrer que si H est propre, les solutions maximales de (HJ) sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(d) Que peut-on dire des solutions maximales de (HJ) pour les hamiltoniens $\mathrm{H}(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4}$ et $\mathrm{H}(x, y) = \dfrac{x^2}{2} - \cos y$?