Équations différentielles (suite)

Exercice 1.— Existence et unicité. Pour les quatre fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, dire s'il y a ou non existence et unicité (locale ? globale ?) des solutions de l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$:

(a) $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$,

(b) $f : x \mapsto -\sqrt[3]{x}$,

(c) $f : x \mapsto x \ln |x|$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$,

(d) $f : x \mapsto 1 + \sqrt{|x|}$ si $x \leqslant 0$ et $f \equiv 1$ si $x > 0$.

Exercice 2.— Sturm-Liouville (suite). Soit $a \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + a(x)y = 0. \tag{1}$$

(a) On suppose que $a(x)$ tend vers $+\infty$ en croissant quand $x \to +\infty$. Montrer alors que toutes les solutions de (1) sont bornées.

(b) Montrer que si toutes les solutions de (1) sont bornées, alors celles de

$$y'' + (a(x) + \varepsilon(x))y = 0, \tag{2}$$

le sont aussi dès que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\varepsilon(x)|dx < \infty$.

(c) Soit $\varepsilon \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\varepsilon'(x)|dx < \infty$. Montrer que les solutions de

$$y'' + (1 + \varepsilon(x))y = 0, \tag{3}$$

sont toutes bornées.