Théorème de Cauchy-Lipschitz

Exercice 1.— Lemme de sortie de tout compact
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{F} : \mathrm{I} \times \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ une application C^1. Soit $\gamma : \mathrm{I}' \to \mathrm{U}$ une solution maximale de l'équation $\dot{x} = \mathrm{F}(t, x)$. Montrer que si l'image de γ est incluse dans un compact de U, alors $\mathrm{I} = \mathrm{I}'$.

Exercice 2.— Sous-variétés intégrales
Soit X un champ de vecteurs C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ tangente au champ (pour tout point $x \in \mathrm{M}$, le vecteur $\mathrm{X}(x)$ appartient à $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$). Montrer que si $\gamma : \mathrm{I} \to \mathrm{U}$ est une solution de l'équation différentielle $\dot{x} = \mathrm{X}(x)$, avec condition initiale $\gamma(0) \in \mathrm{M}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \gamma(t) \in \mathrm{M}$.

Exercice 3.— Courbes intégrales
Soit X un champ de vecteurs C^1 jamais nul sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit Γ une courbe C^1 partout tangente à X. Montrer qu'il existe un paramétrage de Γ qui est une solution de l'équation différentielle $\dot{x} = \mathrm{X}(x)$.

Exercice 4.— Topologie des courbes intégrales

(a) Soit X un champ de vecteurs C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathrm{C}^2(\mathrm{I}, \mathrm{U})$ une solution de l'équation différentielle associée à X. On suppose que x est injective et est d'image fermée. Montrer que x est un plongement. On pourra commencer par montrer qu'il suffit de trouver un t_0 dans I tel que x est *ouverte en* t_0, c'est-à-dire qu'elle envoie les voisinages de t_0 sur des voisinages de $x(t_0)$ dans $x(\mathrm{I})$.

(b) Soit $f \in \mathrm{C}^2(\mathrm{I}, \mathrm{U})$ injective et d'image fermée. Une telle application est-elle nécessairement ouverte ? ouverte en au moins un point ? L'image de f est-elle toujours une sous-variété de U ? une sous-variété de $\mathbb{R}^n$?

(c) Soit X un champ C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Montrer que toute orbite compacte de X est périodique, et que toute orbite fermée est une sous-variété de U.

(d) Donner, si c'est possible, des exemples d'orbites d'un champ de vecteurs C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui sont :
- des sous-variétes compactes de U ;
- compactes sans être des sous-variétés de U ;
- des sous-variétés fermées non compactes de U ;
- fermées, non compactes, sans être des sous-variétés de U ;
- des sous-variétés non fermées de U ;
- non fermées sans être des sous-variétés de U.