Études de points singuliers

Exercice 1.— Question manquante. On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit X le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathrm{X}(x,y) = (y,-x) + (x^2+y^2-1)(1+\lambda x^2)(x,y).$$

Étudier le point singulier $(0,0)$ (stabilité, stabilité asymptotique).

Exercice 2.— Points singuliers non hyperboliques. Étudier la stabilité du point fixe $(0,0)$ pour l' équation $(x,y)' = \mathrm{X}(x,y)$ et pour l'équation linéaire associée $(x,y)' = \mathrm{DX}_{(0,0)}.(x,y)$ dans les cas suivants :

(a) $\mathrm{X}(x,y) = (y-x^3, -x^3-y^3)$. On pourra utiliser la fonction de Liapounov $\mathrm{F}(x,y) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{y^2}{2}$.

(b) $\mathrm{X}(x,y) = (y+\lambda(x^2+y^2)x, -x+\lambda(x^2+y^2)y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dans quels cas le flot de X est-il linéarisable ?

Exercice 3.— Étude complète des équations $\dot{x} = \mathrm{A}x$ en dimension 2. Pour chacune des matrices $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ suivantes, dessiner l'allure des orbites de l'équation différentielle linéaire $\dot{x} = \mathrm{A}x$ (en résolvant explicitement l'équation, ou par toute autre méthode de votre choix) : $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. On distinguera les cas $\lambda < 0$, $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, etc. Justifier le titre de l'exercice.

Exercice 4.— Étude complète d'un exemple. Soit X le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathrm{X}(x,y) = (2y, 3x^2+2x).$$

(a) Etudier les points singuliers de X.

(b) Dessiner en le justifiant le portrait de phase de X.

(c) Le champ X est-il complet ?

Exercice 5.— Attractivité vs stabilité. On dit qu'un point singulier d'un champ de vecteurs est attractif s'il est l'omega-limite de toute orbite du flot. Un point singulier attractif est-il nécessairement stable ?

Exercice 6.— Pour ceux qui voudraient un exemple rigoureux de champ de vecteurs avec des orbites denses dans le tore, voir l'exo 3 de la feuille de TD 7 de l'an dernier.