Mesures invariantes par translation

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ possède de nombreuses propriétés d'invariance (par translation, par rotation) et de quasi-invariance (une application linéaire $\mathrm{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ multiplie les volumes par $|\operatorname{dét} \mathrm{A}|$). Une telle mesure n'existe pas en dimension infinie. Nous allons illustrer ce manque en démontrant qu'il n'existe pas sur l'espace de Banach $\mathrm{E} = \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$ de mesure localement finie invariante par translation autre que la mesure nulle.

L'hypothèse « localement finie » implique que tout point admet un voisinage de mesure finie. Puisque tout voisinage contient une boule de rayon strictement positif, nous allons utiliser l'hypothèse sous la forme de l'existence d'une boule (de rayon > 0) de mesure finie. Cette hypothèse exclut des exemples banals tels que la mesure de comptage. Notre preuve reposera alors sur la propriété suivante de l'espace de Banach E.

Proposition.— *Soit* $\mathrm{R} > 0$. *Alors toute boule (ouverte) de rayon* R *contient une infinité de boules (ouvertes) disjointes de rayon* $\mathrm{R}/4$.

Cette propriété, jointe à la séparabilité de E, implique notre résultat. Voyons comment : les boules de même rayon sont images les unes des autres par des translations ; elles ont donc la même mesure. L'hypothèse implique l'existence de $\mathrm{R} > 0$ tel que la boule de rayon R est de mesure finie. La proposition permet de mettre une infinité de boules disjointes de rayon $\mathrm{R}/4$ dans cette boule. Toutes ces « petites » boules sont les images les unes des autres par des translations et ont donc la même mesure. Puisqu'il y en a une infinité dans une boule de mesure finie, toutes ces boules sont en fait de mesure nulle.

La séparabilité [1] de E signifie qu'il existe une partie dénombrable dense $\mathrm{D} \subset \mathrm{E}$. Puisque tout point de E est alors arbitrairement proche d'un point de D, les boules de rayon $\mathrm{R}/4$ centrées en les points de D recouvrent E, qui est donc de mesure nulle. La seule mesure sur E localement finie et invariante par rotation est donc la mesure nulle.

Il nous reste à démontrer la proposition.

L'idée est relativement simple : on va prendre une suite x_n de points de $[0,1]$ et des fonctions continues $f_n : [0,1] \to [-1,1]$ telles que $f_n(x_n) = 1$ et $f_p(x_n) = -1$ dès que $p \neq n$. Les fonctions $\mathrm{R}/2 \cdot f_n$ sont alors de norme $\mathrm{R}/2$ (et les boules $\mathrm{B}(f_n,\mathrm{R}/4)$ sont donc comprises dans la boule $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$) et à distance R les unes des autres (donc ces mêmes boules sont disjointes).

On peut penser à de nombreuses constructions différentes pour exhiber de telles fonctions (par exemple des polynômes trigonométriques) ; pour notre part, nous allons utiliser des fonctions affines par morceaux très simples : prenons par exemple une famille $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles de $[0,1]$ dont les intérieurs sont disjoints (par exemple les intervalles dyadiques

1. Rappelons par exemple que l'on peut démontrer cette séparabilité en considérant les polynômes à coefficients rationnels et en invoquant le théorème de Stone–Weierstraß. Une preuve plus pédestre, utilisant la continuité uniforme, montrerait simplement que les fonctions affines par morceaux, définies à l'aide de subdivisions rationnelles $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = 1$ et de valeurs rationnelles $y_0,y_1,\dots,y_n$ forment également un ensemble dénombrable dense.

$[2^{-n-1}, 2^{-n}]$). On peut alors facilement définir une fonction f_n affine par morceaux telle que f_n vaut -1 en dehors de l'intervalle I_n, mais 1 en le centre x_n de I_n.

Cela clôt la démonstration.