Complétude de $\mathrm{L}^0(\mathrm{X})$

Soit $(\mathrm{X},\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré fini ($\mu[\mathrm{X}]$ est fini) et $\mathscr{L}^0(\mathrm{X})$ l'espace des fonctions réelles boréliennes de X. La relation d'égalité presque partout est une relation d'équivalence sur $\mathscr{L}^0(\mathrm{X})$ dont on note le quotient $\mathrm{L}^0(\mathrm{X})$. Le dernier exercice du TD 4 et le premier du TD 5 visaient à montrer que l'on pouvait munir $\mathrm{L}^0(\mathrm{X})$ d'une distance le rendant complet et pour lesquelles les suites convergentes soient les suites de fonctions convergeant en mesure. On démontre ici ce fait pour les deux distances proposées.

La distance $\delta(f,g) = \inf\left\{\varepsilon > 0 \,\middle|\, \mu\left[|f-g| > \varepsilon\right] \leqslant \varepsilon\right\}$

Il est évident que la fonction δ vérifie $\delta(f,f) = 0$ et $\delta(f,g) = \delta(g,f)$. Soit deux fonctions $f,g \in \mathrm{L}^0(\mathrm{X})$ telles que $\delta(f,g) = 0$. On a donc pour tout entier $n > 0$, $\mu\left[|f-g| \geqslant \frac{1}{n}\right] \leqslant \frac{1}{n}$. Or la suite des ensembles $\left[|f-g| \geqslant \frac{1}{n}\right]$ est croissante. L'hypothèse implique donc que leur union, l'ensemble des points où f et g diffèrent, est de mesure nulle, c'est-à-dire que $f = g$ presque partout. Reste à vérifier l'inégalité triangulaire. Soit donc f,g et h dans $\mathrm{L}^0(\mathrm{X})$. Fixons $\varepsilon > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\mu\left[|f-h| > \delta(f,g)+\delta(g,h)+2\varepsilon\right] &\leqslant \mu\left[|f-g|+|g-h| > \delta(f,g)+\delta(g,h)+2\varepsilon\right]\\ &\leqslant \mu\left[|f-g| > \delta(f,g)+\varepsilon\right] + \mu\left[|g-h| > \delta(g,h)+\varepsilon\right]\\ &\leqslant \delta(f,g)+\delta(g,h)+2\varepsilon.\end{aligned}$$

et donc $\delta(f,h) \leqslant \delta(f,g) + \delta(g,h)$.

Montrons que les suites convergentes sont exactement les suites convergeant en mesure.

Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant en mesure vers f. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\mu[|f_n - f| > \varepsilon] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc, à partir d'un certain rang n_0, $\mu[|f_n - f| > \varepsilon] \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $\delta(f_n,f) \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $\delta(f_n,f)$ converge bien vers 0. Réciproquement, soit (f_n) une suite de fonctions boréliennes et $f \in \mathrm{L}^0(\mathrm{X})$ telles que $\delta(f_n,f)$ converge vers 0. Fixons $\eta > 0$. On veut montrer que $\mu[|f_n - f| > \eta]$ converge vers 0. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$, et supposons-le inférieur à η. D'après l'hypothèse, on peut trouver n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\mu[|f_n - f| > \varepsilon] \leqslant \varepsilon$. Puisque $\eta > \varepsilon$, cela implique $\mu[|f_n - f| > \eta] \leqslant \varepsilon$ et donc la convergence en mesure.

Reste à montrer la complétude. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^0(\mathrm{X})$. On peut construire une extraction (n_k) telle que $\delta(f_{n_k},f_{n_{k+1}}) < 2^{-k}$, c'est-à-dire

$$\mu[|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| > 2^{-k}] \leqslant 2^{-k}.$$

Puisque la série des (2^{-k}) converge, le lemme de Borel–Cantelli s'applique et prouve que pour presque tout x, il existe un entier $k_0(x)$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0(x)$, on a $|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \leqslant 2^{-k}$. La suite $(f_{n_k}(x))$ est donc de Cauchy presque partout, et converge donc presque partout vers une fonction[1] f. La convergence presque partout étant plus contraignante que la convergence en mesure, on a donc extrait de la suite de Cauchy une sous-suite convergente, ce qui démontre la complétude.

La distance $d(f,g) = \int_{\mathrm{X}} \min(|f-g|,1)\,d\mu$

On a évidemment $d(f,g) = d(g,f)$, et l'équivalence

$$d(f,f) = 0 \Leftrightarrow \min(|f-g|,1) = 0 \text{ p.p.} \Leftrightarrow f = g \text{ p.p.}$$

L'inégalité triangulaire s'obtient simplement en intégrant $\min(|f-h|,1) \leqslant \min(|f-g|,1) + \min(|g-h|,1)$. La fonction d est donc bien une distance.

Soit (f_n) convergeant en mesure vers f. On a alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} d(f_n,f) = \int_{\mathrm{X}} \min(|f_n-f|,1)\,d\mu &= \int_{[|f_n-f|>\varepsilon]} \min(|f_n-f|,1)\,d\mu + \int_{[|f_n-f|\leqslant\varepsilon]} \min(|f_n-f|,1)\,d\mu \\ &\leqslant \mu[|f_n-f|>\varepsilon] + \varepsilon\mu[|f_n-f|\leqslant\varepsilon] \\ &\leqslant \mu[|f_n-f|>\varepsilon] + \varepsilon\mu[\mathrm{X}]. \end{aligned}$$

Puisque le premier terme de la somme converge vers 0, on a donc $d(f_n,f) \leqslant (\mu[\mathrm{X}]+1)\varepsilon$ pour n suffisamment grand, ce qui montre $d(f_n,f) \to 0$.

Réciproquement, si (f_n) ne converge pas en mesure vers f, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ et une extraction $n_k \to +\infty$ tels que $\mu[|f_{n_k} - f| > \varepsilon] \geqslant \varepsilon$. On a alors

$$d(f_{n_k},f) = \int_{\mathrm{X}} \min(|f_{n_k}-f|,1) \geqslant \int_{[|f_{n_k}-f|>\varepsilon]} \min(\varepsilon,1) \geqslant \varepsilon \cdot \min(1,\varepsilon)$$

et la suite $d(f_n,f)$ ne peut donc pas converger vers 0. Ainsi, la convergence en mesure et la convergence pour d sont bien deux notions équivalentes.

Prenons maintenant (f_n) une suite de Cauchy pour la distance d. On peut donc trouver une extraction n_k telle que $d(f_{n_{k+1}},f_{n_k}) \leqslant 2^{-k}$. Montrons, comme le suggère l'énoncé, que pour cette extraction, les fonctions $h = \sum_{k\geqslant 0} h_k$ et $g = \sum_{k\geqslant 0} g_k$ sont finies presque partout, où :

$$h_k = |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \mathbb{1}_{[|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\leqslant 1]} \qquad g_k = \mathbb{1}_{[|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\geqslant 1]}.$$

Les fonctions h_k et g_k sont toutes deux majorées par $\min(|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|,1)$, donc elles sont intégrables, d'intégrale inférieure à 2^{-k}. Leurs sommes h et g sont donc également intégrables, et en particulier finies presque partout.

Soit maintenant un point x en lequel les deux fonctions h et g sont finies (d'après ce qu'on a vu, presque tout point est de ce type). Puisque $g(x)$ est fini, seulement un nombre fini de rangs k sont tels que $|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geqslant 1$. La somme $\sum_{k\geqslant 0} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$

1. Notez que cette fonction n'est pas définie partout. C'est en fait bénin puisque l'ensemble des points sur lesquels elle n'est pas définie est négligeable. On peut donc la prolonger arbitrairement, par exemple par 0, là où elle n'est pas définie. Quel que soit notre prolongement, elle définira le même élément de $\mathrm{L}^0(\mathrm{X})$.

comporte donc un nombre fini de termes plus grands que 1, et les autres sont des termes de la somme définissant $h(x)$, qui est également finie. Ainsi, $\sum_{k \geqslant 0} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ est bien finie presque partout.

Nous pouvons maintenant démontrer que, muni de la distance d, l'espace $\mathrm{L}^0(\mathrm{X})$ est complet : étant donné une suite de Cauchy (f_n), on a pu construire une extraction (f_{n_k}) telle que $\sum_{k \geqslant 0} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ est finie presque partout. En tout point x où cette somme est finie, la suite $(f_{n_k}(x))$ est de Cauchy (la distance entre deux termes de la suite est majorée par le reste d'une série convergente) donc converge et l'on a ainsi montré que (f_{n_k}) convergeait presque partout, donc en mesure, donc pour d. En bref, toute suite de Cauchy admet une sous-suite qui converge, ce qui est suffisant pour établir la complétude.