Oscillation et classes de Baire

Oscillation et points de continuité

De la même façon que pour les suites, $\limsup_{y\to x} f(y)$ est la plus grande des valeurs d'adhérence de f au voisinage de y, c'est-à-dire la plus grande limite possible $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ pour une suite (x_n) convergeant vers x et, dualement, la limite inférieure $\liminf_{y\to x} f(y)$ est la plus petite de ces valeurs d'adhérence. L'oscillation, différence entre ces deux limites inférieure et supérieure, est donc nulle si et seulement si, pour toute suite (x_n) convergeant vers x, $f(x_n)$ tend vers $f(x)$, ce qui est une caractérisation de la continuité en x.

Cela permet d'écrire l'ensemble des points de discontinuité $\mathrm{Dis}(f)$ de f comme une union dénombrable :

$$\mathrm{Dis}(f) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \omega_f(x) \geqslant \frac{1}{n} \right\}.$$

Une fois montré que les ensembles $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \omega_f(x) \geqslant \varepsilon \right\}$ sont tous fermés, on aura donc écrit $\mathrm{Dis}(f)$ comme un F_σ, une réunion dénombrable de fermés[1], et son complémentaire, l'ensemble $\mathrm{Cont}(f)$ des points de continuité de f sera donc un G_δ.

Réécrivons la propriété $\omega_f(t) \geqslant \varepsilon$:

Proposition.— *Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\omega_f(t) \geqslant \varepsilon$ si et seulement si l'on peut trouver deux suites $(t_n^\pm)$ convergeant vers t telles que $\forall n \in \mathbb{N}, f(t_n^+) - f(t_n^-) \geqslant \varepsilon - \dfrac{1}{n}$.*

Démonstration.— Si $\omega_f(t) \geqslant \varepsilon$, on peut par définition trouver deux suites $(t_n^\pm)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers t telles que $f(t_n^\pm) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell^\pm$ avec $\ell^+ - \ell^- \geqslant \varepsilon$. Quitte à extraire, on peut supposer que $|t_n^\pm - t| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $|f(t_n^\pm) - \ell^\pm| \leqslant \dfrac{1}{2n}$, ce qui démontre ce que l'on voulait.

Réciproquement, supposons l'existence des deux suites $(t_n^\pm)_{n\in\mathbb{N}}$ de la proposition. Si l'une des suites $f(t_n^\pm)$ admet une sous-suite qui converge vers $\pm\infty$, l'une des limites dont l'oscillation est la différence est infinie, donc l'oscillation l'est. On peut donc supposer que les deux suites $f(t_n^\pm)$ sont bornées et, quitte à extraire, on peut même supposer grâce au théorème de Bolzano–Weierstraß que ces deux suites convergent vers deux réels $\ell^\pm$. L'hypothèse $f(t_n^+) - f(t_n^-) \geqslant \varepsilon - \dfrac{1}{n}$ implique alors que $\ell^+ - \ell^- \geqslant \varepsilon$, ce qui entraîne $\omega_f(t) \geqslant \varepsilon$. $\square$

1. De manière intéressante, le « mot » G_δ est formé sur les mots allemands *Gebiet* « domaine, région » et *Durchschnitt*, « intersection », tandis que son compagnon F_σ l'est sur les mots français *fermé* et *somme*, qui était autrefois utilisé en tant que synonyme d'union.

On peut maintenant démontrer que l'ensemble $\left\{t \in \mathbb{R} \,\middle|\, \omega_f(t) \geqslant \varepsilon\right\}$ est fermé : soit (x_n) une suite d'éléments de cet ensemble, supposée converger vers $x \in \mathbb{R}$. D'après la proposition, on peut trouver $y_n^{\pm} \in \mathbb{R}$ tel que $|x_n - y_n^{\pm}| \leqslant \frac{1}{n}$ et $f(y_n^+) - f(y_n^-) \geqslant \varepsilon - \frac{1}{n}$. Les suites $(y_n^{\pm})$ convergent donc vers x et d'après l'autre sens de la proposition, $\omega_f(x) \geqslant \varepsilon$.

L'ensemble $\mathrm{Cont}(f)$ des points de continuité de toute fonction f est donc un G_δ. Pour démontrer qu'aucune fonction f ne vérifie $\mathrm{Cont}(f) = \mathbb{Q}$, il suffit de démontrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un G_δ. Cela provient du fait que l'intersection de deux G_δ denses est encore un G_δ dense. En effet, une intersection de deux G_δ denses est à son tour une intersection dénombrable (l'union de deux ensembles dénombrable reste dénombrable) d'ouverts denses et donc, d'après le lemme de Baire, reste dense. Puisque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un G_δ dense, son complémentaire ne peut donc pas en être un.

En revanche, la construction d'une fonction f telle que $\mathrm{Cont}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est classique : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nulle sur les irrationnels et qui vaut $\frac{1}{q}$ sur les rationnels sous forme irréductible $\frac{p}{q}$. On vérifie simplement qu'alors $\mathrm{Cont}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Classes de Baire

Démontrer que les fonctions de classe de Baire 1, qui sont les limites simples des fonctions continues, sont continues sur un ensemble dense, s'inscrit dans le cadre de la recherche d'uniformités cachées qui est, selon G. Godefroy, l'un des quatre grands domaines où le lemme de Baire s'applique[2].

En effet, si la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists \mathrm{N}_x \in \mathbb{N} : n \geqslant \mathrm{N}_x \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. En revanche, la dépendance de N_x par rapport à x est *a priori* très sauvage. Voyons comment le lemme de Baire nous permet « d'obtenir des uniformités cachées. » Soit $\varepsilon > 0$, I un sous-intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{F_N(I)} = \left\{x \in \mathrm{I} \,\middle|\, \forall p,q \geqslant \mathrm{N}, |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon\right\}$. Les ensembles $\mathrm{F_N(I)}$ sont fermés, croissants, et recouvrent tout I. D'après le lemme de Baire, l'un de ces $\mathrm{F_N(I)}$ est donc d'intérieur non vide et contient un intervalle non trivial J. En faisant tendre q vers $+\infty$, on a donc démontré que, dans tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ sur lequel, à partir d'un certain rang N, $|f_n - f|$ est uniformément borné par ε.

Soit x dans ce sous-intervalle J. Quitte à restreindre J, on peut supposer, par continuité de f_N, que pour tout $y \in \mathrm{J}$, $|f_\mathrm{N}(y) - f_\mathrm{N}(x)| \leqslant \varepsilon$. On a donc, pour tout $y \in \mathrm{J}$, $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_\mathrm{N}(x)| + |f_\mathrm{N}(x) - f_\mathrm{N}(y)| + |f_\mathrm{N}(y) - f(y)| \leqslant 3\varepsilon$. Ainsi, $\omega_f(x) \leqslant 6\varepsilon$. On a donc démontré que quel que soit $\kappa > 0$, l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \omega_f(x) \leqslant \kappa\right\}$ est dense. Cela entraîne la densité des ouverts $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \omega_f(x) < \frac{1}{n}\right\}$ et, grâce à une deuxième application du lemme de Baire,

2. cf. Gilles Godefroy, *Le lemme de Baire*, in « La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire », brochure **168** de l'APMEP (2005), pp. 188–203, disponible en ligne à l'adresse `http://www.dma.ens.fr/culturemath/maths/pdf/analyse/baire.pdf`. Les autres directions sont : « limiter la pathologie, » « connaître un ensemble par son complémentaire » et « établir des résultats d'existence. »

la densité de $\mathrm{Cont}(f) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \omega_f(x) < \frac{1}{n} \right\}$.

On peut maintenant voir pourquoi l'indicatrice des rationnels (aussi appelée *fonction de Dirichlet*) $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est de classe de Baire 2 : puisqu'elle n'est continue nulle part, le résultat précédent lui interdit d'être de classe de Baire 1. En revanche, l'indicatrice $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$ des entiers est de classe de Baire 1 : pour le voir, on peut prendre une fonction contiue $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ qui vaut 1 précisément en les entiers (on peut prendre f affine par morceaux, ou par exemple $f(x) = (1 + \cos(2\pi x))/2$). On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f(x)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 1 si x est entier et vers 0 sinon. Bref, $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}} = \lim_{n\to\infty} f^n$.

Si x est un nombre réel, la suite $(m!x)_{m\in\mathbb{N}}$ a deux comportements possibles : si x est rationnel, elle ne prend, à partir d'un certain rang que des valeurs entières ; si x est irrationnel, elle ne prend jamais de valeurs entières. Cela démontre que $(\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(m!x))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ et l'on a donc écrit $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ comme une limite simple de fonctions de classe de Baire 1 :

$$\forall x, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f(m!x)^n.$$

Cela démontre (mais c'était évident !) que la fonction de Dirichlet est mesurable au sens de Lebesgue. Puisque $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle, on a même $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, dm^1 = 0$. En revanche, puisque $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, il est facile de trouver des subdivisions de l'intervalle $[0,1]$ arbitrairement fines dont les sommes de Riemann correspondantes soient égales à 1 et d'autres subdivisions tout aussi fines dont les sommes de Riemann correspondantes soient égales à 0. Les sommes de Riemann ne tendent pas vers une limite fixée quand le pas de la subdivision tend vers 0, c'est-à-dire que $(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}})_{|[0,1]}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann.

C'est historiquement une grande avancée de la théorie de l'intégration de Lebesgue que de pouvoir intégrer des fonctions peu régulières, surtout quand celles-ci sont obtenues comme des limites de fonctions intégrables.