Fonctions mesurables, limites inférieure et supérieure

Exercice 1.— Propriétés des fonctions mesurables
Dans tout cet exercice, $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est mesurable.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que f est mesurable.

(c) Les fonctions en escalier sont-elles mesurables?

(d) Montrer que les points de continuité d'une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forment un borélien.

(e) Soit $f_n : (\mathrm{X},\mathscr{A}) \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble des points où f_n converge est dans $\mathscr{A}$.

(f) Soit $f : (\mathrm{X},\mathscr{A},\mu) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, où $(\mathrm{X},\mathscr{A},\mu)$ est un espace mesuré avec $\mu \neq 0$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une partie $\mathrm{E} \subset \mathrm{X}$ de mesure strictement positive telle que $\forall x,y \in \mathrm{E}, |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Exercice 2.— Limites inférieure et supérieure d'ensembles
On rappelle, pour (A_n) une suite d'ensembles de X, les définitions suivantes :

$$\begin{aligned}
\limsup \mathrm{A}_n &= \left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, x \text{ est dans une infinité de } \mathrm{A}_n\right\} \\
\liminf \mathrm{A}_n &= \left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, x \text{ est dans tous les } \mathrm{A}_n \text{ à partir d'un certain rang}\right\}
\end{aligned}$$

Montrer que $\mathbb{1}_{\limsup(\mathrm{A}_n)} = \limsup \mathbb{1}_{\mathrm{A}_n}$. Montrer un résultat similaire pour la limite inférieure.

Exercice 3.— Lemme de Fatou sur les séries

(a) Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels.
   - Montrer que $\liminf a_n + \liminf b_n \leqslant \liminf(a_n + b_n)$.
   - Donner un exemple pour lequel cette inégalité est stricte.
   - Que se passe-t-il si (a_n) converge?

(b) Montrer que, si $(x_{n,m})$ est une suite de réels positifs ou nuls, on a:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\liminf_{m\to\infty} x_{n,m}\right) \leqslant \liminf_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{n,m}\right)$$

Exercice 4.— Oscillation d'une fonction et classes de Baire
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, on définit les limites inférieure et supérieure de f en x à l'aide des formules :

$$\begin{aligned}
\liminf_{y\to x} f(y) &= \lim_{\delta\to 0} \inf_{y\in[x-\delta,x+\delta]} f(y); \\
\limsup_{y\to x} f(y) &= \lim_{\delta\to 0} \sup_{y\in[x-\delta,x+\delta]} f(y).
\end{aligned}$$

Cela permet de définir *l'oscillation de f en x* :

$$\omega_f(x) = \limsup_{y\to x} f(y) - \liminf_{y\to x} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

(a) Montrer que f est continue en x si et seulement si $\omega_f(x) = 0$.
(b) Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est un G_δ (c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts).
(c) En déduire qu'aucune fonction n'admet $\mathbb{Q}$ comme ensemble de points de continuité. Construire une fonction ayant $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ comme ensemble de points de continuité.
(d) On appelle *fonction de classe de Baire 1* une fonction qui est limite simple de fonctions continues. Montrer qu'une telle fonction est continue sur un ensemble dense.
(e) Montrer que l'indicatrice des rationnels $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$ est de classe de Baire 2, c'est-à-dire qu'elle est limite simple de fonctions de classe de Baire 1, sans en être une elle-même.
(f) Montrer que $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Exercice 5.— Produit de lebesguiens
On note $\mathscr{M}(\mathbb{R}^k)$ l'ensemble des parties mesurables de $\mathbb{R}^k$ (c'est-à-dire la tribu complétée de $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$). A-t-on:

$$\mathscr{M}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{M}(\mathbb{R}) = \mathscr{M}(\mathbb{R}^2)?$$

Exercice 6.— Boréliens et projection
On considère l'espace $\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Montrer que la tribu des boréliens est la plus petite tribu qui rende les projections $f \mapsto f(x)$ mesurables pour tout x.

Exercice 7.— Ensembles analytiques
Cet exercice nécessite une connaissance plus approfondie qu'à l'accoutumée des notions de topologie.
On munit l'ensemble $\mathrm{X} = \mathbb{N}^\mathbb{N}$ de la distance[1]

$$d(x,y) = 2^{-v(x,y)}, \text{ où } v(x,y) = \max\left\{p \in \mathbb{N} \,\middle|\, \forall i \leqslant p, x_i = y_i\right\}$$

définissant la topologie produit.
On dit qu'un espace topologique séparé A est *analytique* s'il existe une application continue surjective $f : \mathrm{X} \to \mathrm{A}$. Si A est une partie d'un espace topologique, il est entendu qu'on le munit de la topologie induite.

(a) Montrer que X est un espace métrique complet séparable.
(b) Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application continue. Montrer que si A est une partie analytique de X, alors $f(\mathrm{A})$ est analytique.
(c) Montrer que tout espace analytique est séparable.

1. Tout l'exercice peut être fait avec la distance alternative $d(x,y) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\max(1,|x_i - y_i|)}{2^i}$, qui définit la même topologie.

(d) Montrer que tout espace métrique complet séparable est analytique.

(e) En déduire qu'une partie fermée d'un espace analytique est analytique.

(f) Montrer que tout produit dénombrable d'espaces analytiques est analytique (indication : $X^{\mathbb{N}}$ est homéomorphe à X).

(g) Montrer que dans un espace séparé, l'ensemble des parties analytiques est stable par réunion dénombrable et intersection dénombrable (on pourra chercher à identifier une intersection dénombrable à une partie fermée d'un produit dénombrable).

(h) En déduire que tout ouvert d'un espace métrique analytique est analytique.

(i) Montrer que tout borélien de $\mathbb{R}$ est un espace analytique. En déduire que $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ a la puissance du continu.

(j) Montrer que la tribu complétée $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ a le même cardinal que $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.