Intégrale de Lebesgue

Exercice 1.— Théorème d'Егоров
Soit $(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu[\mathrm{X}]$ fini. On considère une suite (f_n) de fonctions réelles mesurables sur X convergant vers f μ-presque partout.

(a) Montrer que pour tout $k > 0$ et tout $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mu\left[\bigcup_{j \geqslant n}\left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right] \leqslant \eta.$$

(b) En déduire le théorème d'Egorov : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$ de mesure $\mu[\mathrm{A}] \leqslant \varepsilon$ tel que, sur $\mathrm{X} \setminus \mathrm{A}$, (f_n) converge uniformément vers f.

(c) Donner un contre-exemple à ce résultat si l'on ne suppose plus l'espace de mesure finie.

Exercice 2.— Propriétés du « presque partout »

(a) Montrer que la relation $\underset{\mathrm{pp}}{=}$ d'égalité presque partout est une relation d'équivalence.

(b) Montrer que la relation $\underset{\mathrm{pp}}{\leqslant}$ d'infériorité presque partout est transitive et que :

$$f \underset{\mathrm{pp}}{\leqslant} g \text{ et } g \underset{\mathrm{pp}}{\leqslant} f \Rightarrow f \underset{\mathrm{pp}}{=} g.$$

(c) Montrer que si $f_i, g_i : \mathrm{X} \to \mathbb{C}$ vérifient $f_1 \underset{\mathrm{pp}}{=} f_2$ et $g_1 \underset{\mathrm{pp}}{=} g_2$, alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha f_1 + \beta g_1 \underset{\mathrm{pp}}{=} \alpha f_2 + \beta g_2$.

(d) Montrer que, si $f_n, g_n : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ vérifient $f_n \underset{\mathrm{pp}}{=} g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n \underset{\mathrm{pp}}{=} \liminf\limits_{n\to\infty} g_n$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n \underset{\mathrm{pp}}{=} \limsup\limits_{n\to\infty} g_n$. Si de plus, (f_n) converge presque partout, montrer qu'il en est de même pour (g_n) et qu'alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \underset{\mathrm{pp}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} g_n$.

Exercice 3.— Autour de l'inégalité de Чебышёв
Soit $f : (\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ mesurable. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n = \left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, |f(x)| > n\right\}$ et $\mathrm{B}_n = \left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, n < |f(x)| \leqslant n+1\right\}$.

(a) Montrer que si f est intégrable, $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}} p\, \mu[\mathrm{B}_p]$ converge.

(b) Montrer que si f est intégrable, $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}} \mu[\mathrm{A}_p]$ converge et $(p\, \mu[\mathrm{A}_p])_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée.

(c) À quelle(s) condition(s) les réciproques sont-elles vraies ?

Exercice 4.— Fonctions presque nulles
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive mesurable ($\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne). On suppose que $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_{\mathrm{A}} f\, dm_1 = 0$. Montrer que f est nulle presque partout. Le résultat s'étend-il si f n'est plus supposée positive ?

Exercice 5.— Lemme des moyennes
Soit $f : (\mathrm{X}, \mathscr{A}, \nu) \to \mathbb{C}$ intégrable, où ν est une mesure finie. On suppose qu'il existe un fermé $\mathrm{F} \subset \mathbb{C}$ tel que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$ vérifiant $\nu[\mathrm{A}] \in]0, +\infty[$, on a $\displaystyle\frac{1}{\nu[\mathrm{A}]} \int_{\mathrm{A}} g\, d\nu \in \mathrm{F}$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathrm{X}$, $g(x) \in \mathrm{F}$.

Exercice 6.— Concentration, évanescence, bosse glissante
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive, nulle en dehors de $[0, 1]$ et d'intégrale 1. On définit les suites de fonctions :

$$f_n(x) = n\varphi(nx), \qquad g_n(x) = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right), \qquad h_n(x) = \varphi(x - n).$$

Faire des dessins. Comparer le comportement de ces trois suites de fonctions et celui de leurs intégrales.

Exercice 7.— Sommation par tranches
Soit $f : (\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que

$$\int_{\mathrm{X}} f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu\left[\left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, f(x) > t\right\}\right] dm_1(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\mu\left[\left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, f(x) \geqslant \frac{k}{2^n}\right\}\right].$$

Exercice 8.— Convergence en mesure
Soit $(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu[\mathrm{X}]$ fini. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles mesurables. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure* vers f si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\left[\left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\right\}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(a) Montrer que si (f_n) *converge en norme* L^1, c'est-à-dire si $\displaystyle\int_{\mathrm{X}} |f_n - f|\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors (f_n) converge en mesure vers f. Remarquer que la réciproque est fausse.

(b) Montrer que si (f_n) converge vers f μ-presque partout, (f_n) converge vers f en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

(c) En utilisant le lemme de Borel–Cantelli, montrer que si (f_n) converge vers f en mesure, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge vers f presque partout.

(d) On note $\mathrm{L}^0(\mathrm{X}, \mu)$ l'espace des fonctions mesurables quotienté par la relation d'égalité μ-presque partout. Montrer que sur cet espace, la fonction suivante est une distance et qu'elle métrise bien la convergence en mesure :

$$\delta(f, g) = \inf\left\{\varepsilon > 0 \,\middle|\, \mu\left[|f - g| > \varepsilon\right] \leqslant \varepsilon\right\}.$$

(e) En utilisant le lemme de Borel–Cantelli, montrer que $(\mathrm{L}^0(\mathrm{E}, \mu), \delta)$ est complet.

(f) Montrer qu'en général, il n'existe pas de distance sur $\mathrm{L}^0(\mathrm{E}, \mu)$ qui métrise la convergence μ-presque partout.

Exercice 9.— Intégrale de Riemann

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann[1]. Montrer qu'elle est intégrable au sens de Lebesgue, et que ses intégrales au sens de Lebesgue et de Riemann coïncident. Donner des exemples de fonctions intégrables au sens de Lebesgue, mais pas au sens de Riemann.

[1]L'intégration au sens de Riemann est celle enseignée en classes préparatoires, souvent en se restreignant aux fonctions réglées, voire aux seules fonctions continues. Une fonction *intégrable au sens de Riemann* est une fonction pour laquelle ce procédé a un sens. Pour des définitions plus précises, voir par exemple le chapitre III du tome d'analyse de *Les Maths en Tête* de Xavier Gourdon.