Lebesgue : intégrale, mesure – Nullité presque partout

Exercice 1.— Complétude de L^0
Soit $(\mathrm{X},\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré et

$$\mathscr{L}^0(\mathrm{X}) = \{f : \mathrm{X} \to \mathbb{R} \text{ boréliennes}\}.$$

On note $\mathrm{L}^0(\mathrm{X}) = \mathscr{L}^0(\mathrm{X})/\underset{\mathrm{pp}}{=}$ et on définit (modulo l'égalité presque partout) la fonction d par

$$\forall (f,g) \in \mathrm{L}^0(\mathrm{X})^2,\ d(f,g) = \int_{\mathrm{X}} \min(|f-g|,1)\, d\mu.$$

(a) Montrer que d définit une distance sur $\mathrm{L}^0(\mathrm{X})$.

(b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour d. Montrer qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) telle que les fonctions

$$h = \sum_{k\geqslant 0} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \mathbb{1}_{\{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\leqslant 1\}} \text{ et } g = \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{1}_{\{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\geqslant 1\}}$$

sont finies presque partout. En déduire que la fonction $f := \sum_{k\geqslant 0} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ est finie presque partout.

(c) Montrer que l'espace $(\mathrm{L}^0(\mathrm{X}),d)$ est complet.

Exercice 2.— Intégrale et translation
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On définit, pour $h \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathrm{T}_h(f) : x \mapsto f(x-h)$.
Montrer que $\mathrm{T}_h(f)$ est aussi intégrable et que $\mathrm{T}_h(f)$ tend vers f en norme L^1, i.e. que:

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{T}_h(f) - f| \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Exercice 3.— Autour de l'absolue continuité
Soit $(\mathrm{X},\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré et $f : \mathrm{X} \to \mathbb{C}$ une application intégrable. Montrer que

$$\lim_{\delta\to 0} \left(\sup_{\mu[\mathrm{E}]<\delta} \int_{\mathrm{E}} |f|\, d\mu \right) = 0.$$

Exercice 4.— Escalier du diable
Rappelons la construction de l'ensemble de Cantor: on construit $\mathrm{K}_3^{(n+1)}$ en coupant chacun des intervalles constituant $\mathrm{K}_3^{(n)}$ en trois intervalles de taille égale, et en enlevant l'intervalle du milieu à chaque fois.

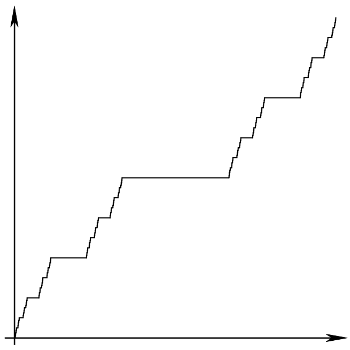

FIG. 1 – Escalier du diable (source: wikipédia)

On pose $f_0 = \mathrm{id}$ et on définit par récurrence f_n comme étant constante sur chacun des intervalles que l'on enlève. On prend comme constante la moyenne des valeurs de f_{n-1} aux extrémités de l'intervalle considéré. On complète de sorte à avoir une fonction affine par morceaux.
On pose alors $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ (on montrera que f est bien définie).
Montrer que f est:
- continue en tout point de $[0,1]$;
- croissante ;
- dérivable et de dérivée nulle presque partout.

Exercice 5.— Support d'une fonction
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction borélienne. Soit Ω la réunion de tous les ouverts U tels que $f = 0$ p.p. sur U c'est-à-dire tels que

$$m_n\left[\left\{x \in \mathrm{U} \,\middle|\, f(x) \neq 0\right\}\right] = 0.$$

Montrer que f est nulle sur Ω preque partout. On pourra remarquer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est σ-compact. (Le *support* de f est par définition le fermé $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$).

Exercice 6.— Régularité de la mesure de Lebesgue
Soit B un borélien de $\mathbb{R}$.
(a) Montrer que la mesure de Lebesgue est *extérieurement régulière* :

$$m_1[\mathrm{B}] = \inf\left\{m_1[\mathrm{O}] \,\middle|\, \mathrm{O} \text{ ouvert contenant B}\right\}.$$

(b) Montrer que la mesure de Lebesgue est *intérieurement régulière* :

$$m_1[\mathrm{B}] = \sup\left\{m_1[\mathrm{K}] \,\middle|\, \mathrm{O} \text{ compact inclus dans B}\right\}.$$

Le résultat est en fait vrai pour la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle sur $\mathbb{R}^n$.