Théorèmes et espaces de Lebesgue

Exercice 1.— Théorème de convergence dominée L^p
Soit (f_n) une suite de fonctions dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu)$ convergeant presque partout vers 0 et telle qu'il existe $g \in \mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu)$ telle que $\forall n, |f_n| \leqslant g$.
Montrer qu'alors la suite converge vers 0 dans l'espace $\mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu)$.

Exercice 2.— Une étude asymptotique
Soit (X,μ) un espace mesuré, $f : \mathrm{X} \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable d'intégrale 1. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathrm{X}} n \log\left[1 + \left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right] d\mu$ converge vers $+\infty$ quand $0 < \alpha < 1$, vers 1 quand $\alpha = 1$ et vers 0 quand $\alpha > 1$.

Exercice 3.— La fonction Γ d'Euler
Montrer que la fonction définie par l'intégrale suivante est de classe C^∞ :

$$\Gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt. \end{array}$$

Exercice 4.— Espace mesuré fini
Soit (X,μ) un espace mesuré. On suppose qu'il existe une fonction f strictement positive telle que f et $1/f$ soient intégrables. Montrer qu'alors $\mu[\mathrm{X}] < \infty$.

Exercice 5.— Relations entre les espaces L^p
Soit (X,μ) un espace mesuré et $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

(a) Montrer que l'ensemble $\mathrm{I}_f = \left\{ p \in [1, +\infty] \;\middle|\; f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu) \right\}$ est un intervalle.
(b) Montrer que si I_f contient $[p_0, +\infty]$, alors $\|f\|_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \|f\|_\infty$.

Exercice 6.— Convergence en mesure
Montrer que si (f_n) est une suite de fonctions convergeant vers f dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu)$, alors la convergence a également lieu en mesure. (En particulier, il existe une sous-suite qui converge presque partout).

Exercice 7.— Convergence et domination
(a) Construire une famille (f_n) de fonctions positives intégrables convergeant vers 0 presque partout, dont les intégrales convergent vers 0, mais qui n'est cependant pas dominée par une fonction intégrable.
(b) Montrer que de toute famille (f_n) de fonctions positives intégrables convergeant vers 0 presque partout et dont les intégrales convergent vers 0, on peut extraire une sous-suite dominée par une fonction intégrable.

(c) Montrer que le résultat précédent n'est plus vrai si on ne suppose plus les fonctions positives.

Exercice 8.— Emboîtement des espaces de Lebesgue
Soit (X,μ) un espace mesuré tel que $\mu[\mathrm{X}] < +\infty$ et $q \geqslant p \geqslant 1$. Montrer qu'alors on a une inclusion $\mathrm{L}^q(\mathrm{X},\mu) \subset \mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu)$. Montrer que l'application d'inclusion est continue et donner sa norme.
Montrer que le résultat n'est pas vrai si X n'est plus supposé μ-fini.