# Dénombrabilité

L'article *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* de Georg Cantor, paru en 1874, est l'acte de naissance de la théorie des ensembles. Cantor y étudie les parties de $\mathbb{R}$ à bijection près et distingue les parties en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$ de celles qui ne le sont pas.
Dans le cadre de la théorie de l'intégration, les ensembles en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$ tiennent un rôle particulier.

**Définition.** On dit qu'un ensemble $\mathrm{E}$ est *dénombrable* s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

**Proposition.** Tout ensemble dénombrable est soit fini, soit en bijection avec $\mathbb{N}$.

*Démonstration.—* Il suffit de démontrer que toute partie infinie $\mathrm{E} \subset \mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. On construit une telle bijection par récurrence : on pose $f(0) = \min \mathrm{E}$ puis, par récurrence, $f(k) = \min(\mathrm{E} \setminus \{f(0), \ldots, f(k-1)\})$ (les ensembles dont on prend les minima ne sont jamais vide car $\mathrm{E}$ est infini). Cette fonction réalise alors une bijection $\mathbb{N} \to \mathrm{E}$. $\square$

**Remarques.**
- On dit parfois que $\mathrm{E}$ et $\mathrm{F}$ sont *équipotents* s'il existe une bijection entre $\mathrm{E}$ et $\mathrm{F}$. On dit aussi (plus fréquemment) qu'ils *ont le même cardinal.*
- Notons que la définition que nous avons donnée se reformule en : *un ensemble* $\mathrm{E}$ *est dénombrable s'il existe une injection* $\mathrm{E} \hookrightarrow \mathbb{N}$. On dit aussi qu'un tel ensemble *s'injecte dans* $\mathbb{N}$.
- Notons que pour certains auteurs, « dénombrable » veut dire « en bijection avec $\mathbb{N}$. » Cette convention, par ailleurs très raisonnable, n'est pas la plus commode pour la théorie de l'intégration.

## Exemples d'ensembles dénombrables

Si $f : \mathrm{E} \hookrightarrow \mathbb{N}$ est une injection, alors toute partie de $\mathrm{E}$ s'injecte également dans $\mathbb{N}$ (il suffit de considérer la restriction $f_{|\mathrm{E}}$). De la même façon, si $\mathrm{F}$ s'injecte dans $\mathrm{E}$, $\mathrm{F}$ est dénombrable (il suffit de considérer $f \circ \iota$, où $\iota : \mathrm{F} \hookrightarrow \mathrm{E}$ est une injection).

**Proposition.** Si $f : \mathrm{E} \twoheadrightarrow \mathrm{F}$ est une surjection et que $\mathrm{E}$ est dénombrable, alors $\mathrm{F}$ est dénombrable.

*Démonstration.—* Pour tout $y \in \mathrm{F}$, la surjectivité de $f$ entraîne que l'ensemble $f^{-1}\{y\}$ est non vide. Définissons une fonction $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ en prenant, pour chaque $y \in \mathrm{F}$ un élément $g(y) \in f^{-1}\{y\}$. On a donc trouvé une fonction $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$ (ce qu'on appelle une *section* de la fonction $f$). En particulier, $g$ est injective et $\mathrm{F}$ est donc dénombrable. $\square$

**Remarque.** De manière plus générale, on a démontré en passant que s'il existe une surjection $\mathrm{E} \twoheadrightarrow \mathrm{F}$, il existe une injection $\mathrm{F} \hookrightarrow \mathrm{E}$. La réciproque est également vraie (quand F est non vide), ce qui permet de n'avoir qu'une seule notion rigoureuse signifiant « E est plus grand que F. »

**Proposition.** Les ensembles $\mathbb{N}^k$ (pour un entier $k \geq 1$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

*Démonstration.—* Soit $p_1, \ldots, p_k$ des nombres premiers distincts. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^k & \to & \mathbb{N} \\ (a_1, \ldots, a_k) & \mapsto & p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} \end{array}$ est une injection.

$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \mapsto & (-1)^a b \end{array}$ est une surjection.

$\chi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^3 & \to & \mathbb{Q} \\ (a, b, c) & \mapsto & (-1)^a \dfrac{b}{c+1} \end{array}$ est une surjection. □

Comme ces ensembles sont clairement infinis, il s'ensuit qu'il existe une bijection entre eux et $\mathbb{N}$. Il n'est d'ailleurs pas si difficile d'en construire d'explicites, mais il faut être un peu plus soigneux.
Pour construire plus d'ensembles dénombrables, il est commode de montrer des propriétés de *stabilité*. On en a déjà deux : les parties d'un ensemble dénombrable et les images surjectives d'un ensemble dénombrable sont dénombrables.

**Proposition.**
- Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable : si $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_k$ sont dénombrables, $\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_k$ l'est également.
- Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable : si $\mathrm{E} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$, et que I et les $(\mathrm{A}_i)$ sont dénombrables, E l'est également.

**Remarque.** Attention : comme on le verra plus loin, un produit *infini*, même dénombrable, d'ensembles dénombrables n'est presque jamais dénombrable.

*Démonstration.—* Pour $i \in [\![1, k]\!]$, soit $\varphi_i : \mathrm{A}_i \hookrightarrow \mathbb{N}$ une injection. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_k & \to & \mathbb{N}^k \\ (a_1, \ldots, a_k) & \mapsto & (\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_k(a_k)) \end{array}$$

est alors une injection. Comme $\mathbb{N}^k$ est dénombrable, $\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_k$ l'est aussi.
Pour le deuxième point, soit $\varphi : \mathrm{I} \hookrightarrow \mathbb{N}$ une injection et, pour $n \in \varphi(\mathrm{I})$, on considère $\psi_n : \mathrm{A}_{\varphi^{-1}(n)} \hookrightarrow \mathbb{N}$ une injection. Pour chaque élément $e \in \mathrm{E}$, on note $m(e) = \min\limits_{\substack{i \in \mathrm{I} \\ e \in \mathrm{A}_i}} \varphi(i)$ et $\chi(e) = (m(e), \psi_{m(e)}(e))$. L'application $\chi : \mathrm{E} \to \mathbb{N}^2$ est bien définie car $m(e) \in \varphi(\mathrm{I})$ par définition, et c'est alors une injection : E est dénombrable. □

## Exemples d'ensembles non dénombrables : la puissance du continu

L'exemple le plus simple d'ensemble non dénombrable est l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$. On peut en fait démontrer simplement un théorème plus général.

**Théorème (Cantor, 1891).** Soit E un ensemble. Il n'existe pas de bijection $\mathrm{E} \to \mathscr{P}(\mathrm{E})$.

*Démonstration.—* Supposons qu'il existe une telle bijection $f : \mathrm{E} \to \mathscr{P}(\mathrm{E})$. Posons

$$\mathrm{F} = \left\{ x \in \mathrm{E} \,\middle|\, x \notin f(x) \right\}.$$

Puisque $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, on peut trouver $x_0$ tel que $f(x_0) = \mathrm{F}$. On a donc soit $x_0 \in \mathrm{F}$, soit $x_0 \notin \mathrm{F}$.
– Si $x_0 \in \mathrm{F}$, par définition, $x_0 \notin f(x_0) = \mathrm{F}$, une contradiction ;
– si $x_0 \notin \mathrm{F}$, par définition, $x_0 \in f(x_0) = \mathrm{F}$, une contradiction.
L'hypothèse de départ était donc absurde : il n'existe pas de telle bijection. □

Ainsi, aucun ensemble en bijection avec $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ (on dit qu'un tel ensemble a *la puissance du continu*) n'est dénombrable. C'est notamment le cas de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ : les applications

$$\begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \rightleftarrows & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} & \mapsto & \left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, a_i = 1 \right\} \\ ([i \in \mathrm{A}])_{i\in\mathbb{N}} & \leftarrow\!\shortmid & \mathrm{A} \end{array}$$

sont deux bijections réciproques (dans la dernière ligne, le crochet est un *crochet d'Iverson* : [P] vaut 1 si la proposition P est vraie et 0 sinon.) Notons que cela donne un exemple de produit dénombrable d'ensembles dénombrables qui ne soit pas dénombrable. On peut donc vérifier qu'un produit infini n'est dénombrable que dans les cas triviaux (i.e. si l'un des facteurs est vide ou si, à l'exception d'un nombre fini, les facteurs sont des singletons).
Pour donner d'autres exemples sans exhiber des bijections explicites qui pourraient être un peu pénibles, on va utiliser le théorème suivant.

**Théorème (Cantor-Schröder-Bernstein, 1895).** Soit E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, E et F sont en bijection.

D'après ce qu'on a déjà dit, ce théorème implique que si l'on a deux fonctions $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$, l'une injective et l'autre surjective, alors E et F sont en bijection.
On peut maintenant donner d'autres exemples d'ensembles en bijection avec $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

**Proposition.** Soit $a < b$ deux réels. Les ensembles $[a,b]$, $]a,b[$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^k$ (pour un entier $k \geq 1$) et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ont la puissance du continu.

*Démonstration.—* Commençons par démontrer que les trois premiers sont en bijection. Déjà, une simple transformation affine montre que pour $a < b$, $[a,b]$ est en bijection avec $[-1,1]$ et $]a,b[$ avec $]-1,1[$. La fonction tangente hyperbolique est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]-1,1[$. Puisqu'il y a une injection claire entre $]-1,1[$ et $[-1,1]$ et que $x \mapsto x/2$ injecte $[-1,1]$ dans $]-1,1[$, le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein implique que tous ces ensembles sont en bijection.

Les propriétés du développement en base 2 et en base 3 montrent que

$$\begin{array}{rcl} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \to & [0,1] \\ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} \end{array}$$

est une surjection et que

$$\begin{array}{rcl} \{0,2\}^{\mathbb{N}} & \to & [0,1] \\ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} & \to & \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^{i+1}} \end{array}$$

est une injection (son image est *l'ensemble triadique de Cantor*). Le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein (avec la bijection $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \simeq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ déjà évoquée) montre alors que $[0,1]$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ sont en bijection.
Enfin, vu la bijection $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{R}$, il suffit de montrer $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \simeq \mathscr{P}(\mathbb{N})^k \simeq \mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ pour obtenir $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En fait, étant donné deux ensembles A et B, on a une bijection [1]

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}(\mathrm{A})^{\mathrm{B}} & \to & \mathscr{P}(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) \\ (\mathrm{X}_b)_{b\in\mathrm{B}} & \mapsto & \displaystyle\bigcup_{b\in\mathrm{B}} \left\{(a,b) \,\middle|\, a \in \mathrm{X}_b\right\} \end{array}$$

Les ensembles $\mathscr{P}(\mathbb{N})^k$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ sont donc en bijection avec $\mathscr{P}(\mathbb{N}\times[\![1,k]\!])$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$. Les ensembles $\mathbb{N}\times[\![1,k]\!]$ et $\mathbb{N}^2$ étant en bijection avec $\mathbb{N}$, on obtient le résultat voulu. $\square$

## Une application

Rappelons qu'un nombre (réel ou complexe) est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers et qu'il est *transcendant* sinon.

**Théorème (Liouville, 1844).** Il existe des nombres réels transcendants.

Ce que l'on vient de voir permet de donner une preuve de ce théorème (c'est le but de l'article original de Cantor, comme son titre l'indique).

*Démonstration.—* Si on note $\mathbb{Z}_n[\mathrm{X}] \subset \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes entiers de degré $\leq n$, on a une bijection

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}^{n+1} & \to & \mathbb{Z}_n[\mathrm{X}] \\ (a_0,\ldots,a_n) & \mapsto & a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n. \end{array}$$

L'ensemble $\mathbb{Z}_n[\mathrm{X}]$ est donc dénombrable. Puisque $\mathbb{Z}[\mathrm{X}] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n[\mathrm{X}]$ est une union dénombrable d'ensembles dénombrables, il est lui-même dénombrable. Enfin, si l'on note

1. Notons que si l'on adopte la notation $2^{\mathrm{A}}$ pour $\mathscr{P}(\mathrm{A})$ (ce qui est sensé au vu de la bijection $\mathscr{P}(\mathrm{A}) \simeq \{0,1\}^{\mathrm{A}}$ évoquée plus haut dans le cas $\mathrm{A} = \mathbb{N}$), cette bijection s'écrit agréablement $(2^{\mathrm{A}})^{\mathrm{B}} \simeq 2^{\mathrm{A}\times\mathrm{B}}$. De manière générale, on a une bijection $(\mathrm{C}^{\mathrm{A}})^{\mathrm{B}} \simeq \mathrm{C}^{\mathrm{A}\times\mathrm{B}}$.

$Z(P) \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des racines réelles d'un polynôme P, l'ensemble des nombres réels algébriques s'écrit

$$\bigcup_{\substack{P \in \mathbb{Z}[X] \\ P \neq 0}} Z(P).$$

Union dénombrable d'ensembles finis, il est donc dénombrable.
Puisque $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, il existe un nombre transcendant (il en existe même une quantité non dénombrable). □

## Preuve du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux injections. On pose $E' = f[E] \subset F$ et $F' = g[F] \subset E$. Les applications $f$ et $g$ sont des bijections de E sur $E'$ et de F sur $F'$, respectivement. On va construire une bijection $h : E \to F'$, et l'application $g^{-1} \circ h$ sera alors une bijection de E dans F.
Pour cela, posons $E_0 = E \setminus F'$ puis, par récurrence, $E_1 = g \circ f[E_0]$, $E_2 = g \circ f[E_1]$, etc. Par construction, $g \circ f$ envoie $\bigcup_{i \geq 0} E_i$ sur $\bigcup_{i \geq 1} E_i$, qui est inclus dans $g[F] = F'$. On pose alors

$$h : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ a & \mapsto & \begin{cases} (g \circ f)(a) & \text{si } a \in \bigcup_{i \geq 0} E_i \ ; \\ a & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

On a alors $h[E] = F'$. Comme en outre $h$ est obtenue en recollant deux injections d'images disjointes, $h$ est injective. On a donc obtenu la bijection $h : E \to F'$ recherchée.