L3 – INTÉGRATION 1 – EXAMEN DU 09/01/2013
DURÉE : 3 HEURES

Les Exercices 1 et 4 sont indépendants entre eux et indépendants des Exercices 2 et 3. L'Exercice 3 utilise le résultat de l'Exercice 2. On pourra admettre le résultat d'une question et traiter les questions suivantes.

Exercice 1 (Intégrales à paramètre)**.** On note λ la mesure de Lebesgue sur l'espace mesurable $(]0,+\infty[,\mathcal{B}(]0,+\infty[))$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Soit $f :]0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction borélienne. On note

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t).$$

(1) Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$.

(2) Exprimer la limite de F en $+\infty$. Quelle est la valeur de cette limite lorsque $f(t) > 0$ pour λ-presque tout $t \in]0,+\infty[$.

(3) Vérifier que pour tous $u, v \geq 0$, on a

$$\frac{2uv}{1+u^2v^2} \leq 1.$$

Montrer que F est de classe C^1 sur l'ouvert $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.

(4) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la fonction f pour que F admette au point $x = 0$ une dérivée à droite finie.

Exercice 2 (Ensembles de niveaux)**.** Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. On note λ la mesure de Lebesgue sur l'espace mesurable $([0,+\infty[,\mathcal{B}([0,+\infty[))$.

Soit $\varphi : E \to [0,+\infty[$ une fonction mesurable et positive. Pour tout $t \geq 0$, on définit l'ensemble mesurable $E_t^\varphi = \{x \in E : \varphi(x) \geq t\}$. Le but de l'exercice est de démontrer la formule suivante :

$$(*) \qquad \int_E \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_0^{+\infty} \mu(E_t^\varphi)\,\mathrm{d}\lambda(t).$$

(1) On traite tout d'abord le cas où $\varphi : E \to [0,+\infty[$ est une fonction mesurable, positive et étagée.

  (a) Montrer que la fonction $t \mapsto \mu(E_t^\varphi)$ est aussi mesurable, positive et étagée.

  (b) Démontrer la formule $(*)$.

(2) Soit à présent $\varphi : E \to [0,+\infty[$ une fonction mesurable et positive quelconque. Démontrer la formule $(*)$ en justifiant que la fonction $t \mapsto \mu(E_t^\varphi)$ est bien mesurable.

Exercice 3 (Théorème du Porte-Manteau)**.** Dans cet exercice, on considère l'espace topologique $\mathbf{R}^d$ $(d \geq 1)$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$. Pour tout borélien B de $\mathbf{R}^d$, on note $\overline{B}$ la fermeture de B, $\mathring{B}$ l'intérieur de B et $\partial B = \overline{B} \setminus \mathring{B}$ la frontière de B.

Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et μ des mesures de probabilités sur $(\mathbf{R}^d,\mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$. On dit que μ_n **converge étroitement vers** μ si pour toute fonction continue et bornée $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ on a

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence entre les quatre assertions suivantes :

($\spadesuit$) μ_n converge étroitement vers μ.

($\heartsuit$) Pour tout ouvert O de $\mathbf{R}^d$, on a

$$\liminf_n \mu_n(O) \geq \mu(O).$$

($\diamondsuit$) Pour tout fermé F de $\mathbf{R}^d$, on a

$$\limsup_n \mu_n(F) \leq \mu(F).$$

($\clubsuit$) Pour tout borélien B de $\mathbf{R}^d$ tel que $\mu(\partial B) = 0$, on a

$$\lim_n \mu_n(B) = \mu(B).$$

On se propose de montrer les différentes équivalences en plusieurs étapes.

(1) Montrer d'abord que les assertions ($\heartsuit$) et ($\diamondsuit$) sont équivalentes.

(2) Montrer ensuite que les assertions ($\heartsuit$) et ($\diamondsuit$) entraînent l'assertion ($\clubsuit$).

(3) Soit O un ouvert de $\mathbf{R}^d$. Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de fonctions à valeurs réelles, continues, bornées sur $\mathbf{R}^d$ et telles que $0 \leq \varphi_p \leq \varphi_{p+1} \leq \mathbf{1}_O$ pour tout $p \in \mathbf{N}$ et $\lim_p \varphi_p = \mathbf{1}_O$. En déduire alors que l'assertion ($\spadesuit$) entraîne l'assertion ($\heartsuit$).

(4) Dans cette question, on démontre que l'assertion ($\clubsuit$) entraîne l'assertion ($\spadesuit$). Soit $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une fonction continue et bornée.

(a) Montrer que l'on peut se ramener au cas où $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^d$. Par la suite, on supposera que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^d$.

(b) Pour tout $t \geq 0$, on définit l'ensemble fermé $F_t = \{x \in \mathbf{R}^d : f(x) \geq t\}$. Que vaut ∂F_t ?

(c) Montrer qu'il existe une quantité au plus dénombrable de réels $t > 0$ tels que $\mu(\partial F_t) > 0$. En déduire que pour Lebesgue-presque tout $t \geq 0$, on a

$$\lim_n \mu_n(F_t) = \mu(F_t).$$

(d) En utilisant le résultat de l'Exercice 2, montrer que

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Exercice 4 (Mesures contractantes)**.** Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $T : E \to E$ une bijection telle que T et T^{-1} sont mesurables.

Soit μ une mesure de probabilités sur $(E, \mathcal{A})$. On dira que μ est **contractante** si pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < 1$, il existe une suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{Z}$ telle que $\lim_k \mu(T^{n_k}(A)) = 0$.

Soient μ et ν deux mesures de probabilités sur $(E, \mathcal{A})$ qui ont les mêmes ensembles négligeables. Le but de l'exercice est de montrer que μ est contractante si et seulement si ν est contractante.

(1) On raisonne par l'absurde et on suppose que μ est contractante alors que ν ne l'est pas. Montrer qu'il existe un sous-ensemble mesurable $A \in \mathcal{A}$, un réel $\alpha > 0$ et une suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{Z}$ tels que

$$\mu(T^{n_k}(A)) \leq 2^{-k} \quad \text{et} \quad \nu(T^{n_k}(A)) \geq \alpha, \forall k \in \mathbf{N}.$$

(2) En déduire une contradiction.