L3 – INTÉGRATION 1 – CORRIGÉ DU PARTIEL

Exercice 1 (Théorème d'Egoroff)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$ et $f_n : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ une suite de fonctions mesurables. On définit l'ensemble de convergence de la suite (f_n) par

$$C = \left\{ x \in E : \lim_n f_n(x) \text{ existe} \right\}.$$

(1) On remarque que pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy. On a donc

$$\begin{aligned} x \in C &\iff \forall k \geq 1, \exists n \geq 1, \forall i, j \geq n, |f_i(x) - f_j(x)| \leq \frac{1}{k} \\ &\iff x \in \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{i,j \geq n} \left\{ x \in E : |f_i(x) - f_j(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}. \end{aligned}$$

Puisque les fonctions f_n sont mesurables, on a $\left\{ x \in E : |f_i(x) - f_j(x)| \leq \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{A}$ est une tribu, on en déduit $C \in \mathcal{A}$.

(2) Puisque la suite $(f_n)_n$ converge vers f μ-p.p., on en déduit

$$\mu\left(\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} A_n^k \right) = \mu(E).$$

En particulier, on a pour tout $k \geq 1$,

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n^k \right) = \mu(E).$$

Par propriété de la mesure, on sait alors que pour tout $k \geq 1$, $\lim_n \uparrow \mu(A_n^k) = \mu(E)$. Fixons $\varepsilon > 0$ et $k \geq 1$. Puisque $\mu(E) < \infty$, il existe alors $n_{k,\varepsilon} \geq 1$ tel que $\mu(A_{n_{k,\varepsilon}}^k) > \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2^k}$. Ceci entraîne bien que $\mu(E \setminus A_{n_{k,\varepsilon}}^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

(3) Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$A_\varepsilon = \bigcap_{k \geq 1} A_{n_{k,\varepsilon}}^k.$$

On a

$$\mu(E \setminus A_\varepsilon) \leq \sum_{k \geq 1} \mu(E \setminus A_{n_{k,\varepsilon}}^k) < \sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Fixons à présent $\varepsilon > 0$. Pour chaque $\delta > 0$, on peut choisir $k = k(\delta) \geq 1$ de telle sorte que $\frac{1}{k(\delta)} \leq \delta$. Posons $n(\delta) = n_{\varepsilon, k(\delta)}$. Alors pour tout $x \in A_\varepsilon$, on a $x \in A_{n(\delta)}^{k(\delta)}$ et donc $|f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k(\delta)} \leq \delta$ pour tout $i \geq n(\delta)$. Ceci démontre bien que la convergence de la suite $(f_n)_n$ est uniforme sur l'ensemble mesurable A_ε.

(4) Prenons par exemple $(E, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mathrm{card})$. Posons $f_n = \delta_{\{n\}} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Il est facile de voir que la suite $(f_n)_n$ converge simplement mais pas uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 2 (Inégalité de Jensen)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) = 1$. Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ une fonction positive et *convexe*, c'est-à-dire,

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\,\varphi(x) + (1-t)\,\varphi(y), \forall t \in [0,1], \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

(1) Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On définit la fonction taux d'accroissement

$$\psi :]x_0, \infty[\to \mathbf{R} : x \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

Soient $x, y \in]x_0, \infty[$ tels que $x \leq y$. Par convexité de la fonction φ, on a

$$\varphi(x) \leq \frac{y - x}{y - x_0}\varphi(x_0) + \frac{x - x_0}{y - x_0}\varphi(y).$$

Ceci entraîne $\psi(x) \leq \psi(y)$. Prenons à présent $a < x_0$. Par convexité de la fonction φ, on a

$$\varphi(x_0) \leq \frac{x - x_0}{x - a}\varphi(a) + \frac{x_0 - a}{x - a}\varphi(x).$$

Ceci entraîne $\frac{\varphi(x_0) - \varphi(a)}{x_0 - a} \leq \psi(x)$. Puisque la fonction ψ est croissante et minorée sur $]x_0, \infty[$, elle admet une limite finie en x_0. On pose

$$\varphi'_d(x_0) = \inf_{x \in]x_0, \infty[} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}.$$

Puisque $\psi(x) \geq \frac{\varphi(x_0) - \varphi(a)}{x_0 - a}$ pour tous $a, x \in \mathbf{R}$ avec $a < x_0 < x$, on a bien

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \varphi'_d(x_0)(x - x_0), \forall x \in \mathbf{R}.$$

(2) Posons $\mathcal{E}_\varphi = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 : \varphi(x) \geq ax + b, \forall x \in \mathbf{R}\}$. D'après la question précédente, on a $(\varphi'_d(x), \varphi(x) - \varphi'_d(x)x) \in \mathcal{E}_\varphi$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Par conséquent,

$$\varphi(x) = \sup_{(a,b) \in \mathcal{E}_\varphi} (ax + b), \forall x \in \mathbf{R}.$$

(3) Soit $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ une fonction intégrable. On a

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\int f \,\mathrm{d}\mu\right) &= \sup_{(a,b) \in \mathcal{E}_\varphi} \left(a \int f \,\mathrm{d}\mu + b\right) \\
&\leq \int \sup_{(a,b) \in \mathcal{E}_\varphi} (af(x) + b)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Exercice 3 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** On notera λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$. Soient $T > 0$ et $f : (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R})) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ une fonction borélienne bornée et T-périodique.

On suppose d'abord que $I = [a, b]$ est un intervalle borné de $\mathbf{R}$. Soit $n \geq 1$ et notons $N(n) = \left[n\frac{b-a}{T}\right]$. Pour $1 \leq k \leq N(n)$, on note $I(k) = \left[a + (k-1)\frac{T}{n}, a + k\frac{T}{n}\right[$. On a alors

$$I = \left(\bigcup_{1 \leq k \leq N(n)} I(k)\right) \cup \left[a + N(n)\frac{T}{n}, b\right].$$

Par T-périodicité de la fonction f, on obtient

$$\begin{aligned}\int_I f(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x) &= \sum_{1 \leq k \leq N(n)} \int_{I(k)} f(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x) + \int_{\left[a+N(n)\frac{T}{n}, b\right]} f(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \frac{N(n)}{n} \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}(t) + \int \mathbf{1}_{\left[a+N(n)\frac{T}{n}, b\right]}(x) f(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x).\end{aligned}$$

Puisque $0 \leq b - a - N(n)\frac{T}{n} \leq \frac{T}{n}$ et f est bornée, en appliquant le Théorème de Convergence Dominée, on obtient

$$\lim_n \int \mathbf{1}_{\left[a+N(n)\frac{T}{n}, b\right]}(x) f(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x) = 0.$$

Puisque $\lim_n \frac{N(n)}{n} = \frac{b-a}{T}$, on en déduit

$$\lim_n \int_I f(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \lambda(I)\,\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}(t).$$

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ un borélien borné. On a donc $A \subset [-K, K]$ pour un certain $K > 0$. On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ de tous les boréliens $B \subset [-K, K]$ tel que

$$\lim_n \int_B f(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \lambda(B)\,\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}(t).$$

On montre que $\mathcal{M}$ est une classe monotone qui contient tous les intervalles $I \subset [-K, K]$. En effet, il est clair que $\emptyset \in \mathcal{M}$. Si $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subset B$, on a

$$\begin{aligned}\int_{B \setminus A} f(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x) &= \int_{B \setminus A} f(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x) - \int_{B \setminus A} f(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &\to \lambda(B)\,\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}(t) - \lambda(A)\,\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}(t) \\ &= \lambda(B \setminus A)\,\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}(t),\end{aligned}$$

c'est-à-dire $B \setminus A \in \mathcal{M}$. Enfin soient $A_k \in \mathcal{M}$ et $A_k \subset A_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Posons $A = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $k \in \mathbf{N}$ tel que $\lambda(A \setminus A_k) \leq \frac{\varepsilon}{3(\|f\|_\infty + 1)}$. On a pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\left|\int_{A \setminus A_k} f(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x)\right| \leq \|f\|_\infty \int_{A \setminus A_k} \mathrm{d}\lambda(x) = \|f\|_\infty\,\lambda(A \setminus A_k) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$\lambda(A \setminus A_k)\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}(t)\right| \leq \|f\|_\infty\,\lambda(A \setminus A_k) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puisque $A_k \in \mathcal{M}$, on choisit $n_0 \in \mathbf{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \int_{A_k} f(nx) \, \mathrm{d}\lambda(x) - \lambda(A_k) \, \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, \mathrm{d}(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par inégalité triangulaire, on obtient donc pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \int_{A} f(nx) \, \mathrm{d}\lambda(x) - \lambda(A) \, \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, \mathrm{d}(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci entraîne que $A \in \mathcal{M}$. Ainsi, $\mathcal{M}$ est une classe monotone qui contient les intervalles de $[-K, K]$.

Par conséquent, le lemme de classe monotone montre que $\mathcal{B}([-K, K]) = \mathcal{M}$, et donc $A \in \mathcal{M}$.