L3 – INTÉGRATION 1 – PARTIEL DU 23/10/2012

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Théorème d'Egoroff)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$ et $f_n : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ une suite de fonctions mesurables. On définit l'ensemble de convergence de la suite $(f_n)_n$ par

$$C = \left\{ x \in E : \lim_n f_n(x) \text{ existe} \right\}.$$

(1) Montrer que

$$C = \bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \bigcap_{i,j \geq n} \left\{ x \in E : |f_i(x) - f_j(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

En déduire que $C \in \mathcal{A}$.

(2) On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge μ-p.p. vers une fonction mesurable f. Pour tous $k, n \in \mathbf{N}^*$, on définit

$$A_n^k = \bigcup_{1 \leq p \leq n} \bigcap_{i \geq p} \left\{ x \in E : |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in \mathbf{N}^*$, il existe $n_{k,\varepsilon} \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\mu(E \setminus A^k_{n_{k,\varepsilon}}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

(3) En déduire le **Théorème d'Egoroff** : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ et $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A_ε.

(4) Montrer que ce résultat est faux en général si $\mu(E) = \infty$.

Exercice 2 (Inégalité de Jensen)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) = 1$. Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ une fonction positive et *convexe*, c'est-à-dire,

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\,\varphi(x) + (1-t)\,\varphi(y), \forall t \in [0,1], \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

(1) Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Montrer que la dérivée à droite de φ en x_0, notée $\varphi'_d(x_0)$, existe et que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \varphi'_d(x_0)(x - x_0).$$

(2) Soit $\mathcal{E}_\varphi = \{(a,b) \in \mathbf{R}^2 : \varphi(x) \geq ax + b, \forall x \in \mathbf{R}\}$. Montrer que

$$\varphi(x) = \sup_{(a,b) \in \mathcal{E}_\varphi} (ax + b), \forall x \in \mathbf{R}.$$

(3) Montrer que toute fonction intégrable $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ satisfait l'**Inégalité de Jensen** :

$$\varphi\left(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right) \leq \int_E \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu.$$

Exercice 3 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** On notera λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$. Soient $T > 0$ et $f : (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R})) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ une fonction borélienne bornée et T-périodique.

Montrer que pour tout borélien borné $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, on a

$$\lim_n \int_A f(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \lambda(A)\,\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t).$$

Indication : On montrera d'abord l'égalité dans le cas où $A = I$ est un intervalle borné de $\mathbf{R}$.