TD de révision : vrai ou faux ?

1. **Vrai pour l'intersection.** C'est un résultat du cours (c'est même valable pour une intersection quelconque de tribus et c'est comme cela que l'on définit la tribu engendrée par un ensemble de parties.)

   Faux pour l'union.

   $$\sigma(\{\{1\}\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \text{ et } \sigma(\{\{3\}\}) = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$$

   sont deux tribus sur $\{1,2,3\}$ mais leur union n'est pas une tribu : par exemple, elle contient $\{1\}$, $\{3\}$ mais pas leur union $\{1,3\}$.

2. **Vrai pour** X **fini ou** X **dénombrable.** Comme le fait remarquer le corrigé, c'est une conséquence de l'exercice 4 du TD 1.

   Faux pour X **non dénombrable.** Les tribus $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ contiennent les singletons (qui sont dénombrables et fermés) mais ne sont pas la tribu pleine.

3. **Vrai.** La tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles $(]r, +\infty[)_{r\in\mathbb{Q}}$. Une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ est donc mesurable si et seulement si, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\left\{x \in \mathrm{E} \,\middle|\, f(x) > r\right\} = f^{-1}(]r, +\infty[) \in \mathscr{A}$.

4. **Vrai.** Soit F une primitive de f. Cette fonction est par définition dérivable. Cela implique qu'elle est continue et donc mesurable. La fonction f s'écrit alors comme limite simple de fonctions mesurables :

   $$f(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(\mathrm{F}\left(x + \frac{1}{n}\right) - \mathrm{F}(x)\right).$$

5. **Vrai.** Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue est une fonction mesurable de l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ dans lui-même. La composée

   $$f \circ g : (\mathrm{E}, \mathscr{A}) \xrightarrow{g} (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

   est donc bien mesurable.

6. **Vrai.** Sous ces hypothèses, la fonction de répartion $\mathrm{F} : x \mapsto \mu([0,x])$ réalise un homéomorphisme de $[0,1]$ dans lui-même (en raisonnant comme à l'exercice 4 du TD 3). Il suffit alors de prendre les intervalles

   $$\mathrm{A}_1 = \left[0, \mathrm{F}^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right[, \mathrm{A}_2 = \left[\mathrm{F}^{-1}\left(\frac{1}{n}\right), \mathrm{F}^{-1}\left(\frac{2}{n}\right)\right[, \ldots$$
   $$\mathrm{A}_{n-1} = \left[\mathrm{F}^{-1}\left(\frac{n-2}{n}\right), \mathrm{F}^{-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right[, \mathrm{A}_n = \left[\mathrm{F}^{-1}\left(\frac{n-1}{n}\right), 1\right].$$

7. **Vrai.** $\nu(\mathrm{Y}) = (f_*(\mu))(\mathrm{Y}) = \mu(f^{-1}(\mathrm{Y})) = \mu(\mathrm{X})$.

8. **Faux.** Si $(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu) = (\{0\}, \mathscr{P}(\{0\}), \delta_0)$ et $(\mathrm{Y}, \mathscr{B}, \nu) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$, on a bien $\mu(\mathrm{X}) = \nu(\mathrm{Y}) = 1$ mais, pour toute fonction (automatiquement mesurable) $f : \{0\} \to [0,1]$, $f_*(\mu) = f_*(\delta_0) = \delta_{f(0)} \neq \lambda$.
9. **Vrai pour $\mathbb{N}$.** En effet, si $y \in \mathbb{N}$, $f_*(\mu)(\{y\}) = |f^{-1}(\{y\})|$. Donc, si $f_*(\mu) = \mu$, on a $\forall y \in \mathbb{N}, \exists! x \in \mathbb{N} : y = f(x)$ et f est bijective.

   Faux pour $[0,1]$. On peut le voir immédiatement si on remarque que si f et g coïncident λ-presque partout alors $f_*(\lambda) = g_*(\lambda)$. Ainsi, la fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ valant 1 en 0 et x en $x \neq 0$ vérifie les hypothèses mais n'est pas bijective. Un exemple plus intéressant est donné par *l'application du boulanger* qui associe à $x \leq 1/2$ le nombre $2x$ et à $x \geq 1/2$ le nombre $2 - 2x$. (Pourquoi ce nom ?)
10. **Faux dans le cas général.** Il suffit de prendre $(\mathrm{E}, \mu) = (\mathbb{R}, \lambda)$ et $f(x) = x$.

    Vrai dans le cas $\mu(\mathrm{E}) < +\infty$. La suite décroissante d'ensembles
$$\mathrm{E}_n = \left\{ x \in \mathrm{E} \,\middle|\, |f(x)| > n \right\}$$
    est d'intersection vide. Puisque $\mu(\mathrm{E}_n) < +\infty$, on a bien $\mu(\mathrm{E}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
11. **Vrai dans les deux cas.** On a
$$\mu\left(\left\{ x \in \mathrm{E} \,\middle|\, |f(x)| > n \right\}\right) \leq \frac{1}{n} \int_{\mathrm{E}} |f| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
12. **Faux.** Si $(\mathrm{E}, \mu) = (\mathbb{R}, \lambda)$, $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ vérifie
$$\liminf f_n = \lim f_n = 0 < \liminf \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \lim \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 1.$$
13. **Vrai.** C'est le lemme de Fatou.
14. **Faux.** $(\mathrm{E}, \mu) = (\mathbb{R}, \lambda)$ et $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ constituent toujours un contre-exemple.
15. **Faux.** La suite de fonctions sur $([0,1], \lambda)$ valant $f_n = \mathbb{1}_{[0,1/2]}$ si n est pair et $f_n = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$ si n est impair vérifie
$$\int_0^1 \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\lambda = \int_0^1 1 \, d\lambda = 1 > \limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = 1/2.$$
16. **Faux en général.** Si $(\mathrm{E}, \mu) = (\mathbb{R}, \lambda)$ et $f_n = \mathbb{1}_{[n,+\infty[}$, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = +\infty \text{ mais } f = 0.$$
    Vrai si f_1 est intégrable. On applique le théorème de convergence monotone aux fonctions $g_n = f_1 - f_n$.
17. **Vrai.** D'après le lemme de Fatou,
$$\int_{\mathrm{E}} f \, d\mu = \int_{\mathrm{E}} \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathrm{E}} f_n \, d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathrm{E}} f_n \, d\mu \leq \int_{\mathrm{E}} f \, d\mu.$$

18. **Faux.** $\mathbb{Q}$ est de mesure de Lebesgue nulle mais il n'est pas borné.
19. **Vrai.** Un ouvert non vide $\mathrm{O} \subset \mathbb{R}^n$ contient une boule $\mathrm{B}(x, r)$ de rayon $r > 0$ pour la norme $\| \cdot \|_\infty$, de mesure de Lebesgue $(2r)^n$.
20. **Vrai.** Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une énumération d'une partie dénombrable dense de $\mathbb{R}^n$ (par exemple $\mathbb{Q}^n$) et B_n une boule de mesure de Lebesgue $\leq \varepsilon 2^{-n}$ centrée autour de r_n. L'ouvert $\mathrm{O} = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n$ convient.
21. **Vrai.** Un compact K est inclus dans $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]^n$, de mesure de Lebesgue $(2\mathrm{A})^n$, pour $\mathrm{A} > 0$ assez grand.
22. **Faux.** Les *ensembles de Cantor gras* (TD 3, exercice 3) sont des exemples de compacts d'intérieur vide et de mesure strictement positive.
23. **Faux dans le cas général.** L'*escalier du diable* (TD 5, exercice 6) est une fonction continue $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dont la restriction à l'ensemble de Cantor standard K_3 est surjective. Si on la prolonge hors de $[0, 1]$ par $f(x) = x$, on obtient une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie le négligeable K_3 sur le non-négligeable $[0, 1]$.

    Vrai dans le cas C^1**.** C'est la troisième question de l'exercice 5 du TD 5.
24. **Faux dans les deux cas.** Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est la fonction nulle, $\mathrm{N} = \{0\}$ constitue un contre-exemple manifeste.
25. **Faux.** Si A est négligeable, la propriété de mesurabilité

    $$\forall \mathrm{B} \in \mathscr{P}(\mathbb{R}), \lambda^*(\mathrm{A}) = \lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \lambda^*(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B})$$

    est trivialement vérifiée (sous la forme $0 = 0 + 0$) donc A est mesurable.
26. **Vrai.** L'exemple de Vitali, vu en cours, montre qu'une partie de $[0, 1]$ contenant un unique représentant de chaque classe de congruence modulo $\mathbb{Q}$ ne peut pas être mesurable et que de tels ensembles existent. Sans le moindre effort supplémentaire, on peut faire la même construction pour une partie de $[0, \varepsilon]$, qui sera alors automatiquement de mesure extérieure au plus ε.
27. **Vrai.** C'est encore une application de la construction de Vitali : notons $\sim$ la relation d'équivalence définie par $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Même si on ne le dit pas forcément explicitement, une étape dans la preuve du fait que l'ensemble de Vitali n'est pas mesurable est le résultat suivant.

    Tout ensemble mesurable $\mathrm{V} \subset \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x, y \in \mathrm{V}, x \sim y \Rightarrow x = y$ *est de mesure nulle.*

    En effet, si $r < s$, les ensembles $((\mathrm{V} \cap [r, s]) + q)_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}$ forment alors une collection infinie d'ensembles disjoints dont chacun est de mesure $\lambda(\mathrm{V})$ et dont l'union est incluse dans $[r - 1, s + 1]$. On a donc $\lambda(\mathrm{V} \cap [r, s]) = 0$ et $\lambda(\mathrm{V}) = 0$.

    Soit donc $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable dont toutes les parties sont supposées mesurables. Soit $\mathrm{V} \subset \mathrm{E}$ un système de représentants de la restriction de $\sim$ à E, c'est-à-dire un ensemble tel que $\forall x \in \mathrm{E}, \exists! y \in \mathrm{V} : x \sim y$. D'après le résultat précédent, puisque V est supposé mesurable, on a $\lambda(\mathrm{V}) = 0$. Cela entraîne que $\mathrm{E} \subset \displaystyle\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \mathrm{V} + q$ est également négligeable.

28. **Faux.** Soit $\mathrm{E} = \mathrm{K}_3$ l'ensemble de Cantor standard et $\varepsilon_n = 3^{-n}$. Supposons qu'il existe une telle famille (I_n). L'intervalle I_1 étant de diamètre $< 3^n$, il ne peut pas intersecter les deux moitiés $\mathrm{E} \cap [0,1/3]$ et $\mathrm{E} \cap [2/3,1]$ de E. Soit E_1 une de ces deux moitiés telles que $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{I}_1 = \varnothing$. De même, I_2 ne peut pas intersecter les deux moitiés de E_1 (qui sont $\mathrm{E} \cap [0,1/9]$ et $\mathrm{E} \cap [2/9,1/3]$ si $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E} \cap [0,1/3]$ et $\mathrm{E} \cap [2/3,7/9]$ et $\mathrm{E} \cap [8/9,1]$ dans l'autre cas) et l'on pose E_2 l'une de ces moitiés vérifiant $\mathrm{E}_2 \cap \mathrm{I}_2 = \varnothing$. Par récurrence, on construit ainsi une suite de compacts emboîtés E_n de diamètre 3^{-n} vérifiant $\mathrm{E}_n \cap \left(\bigcup_{k\leq n} \mathrm{I}_k\right) = \varnothing$. L'intersection de ces compacts est alors un point de E n'appartenant à aucun intervalle I_n, ce qui constitue une contradiction.

29. **Faux.** On définit la suite de boréliens

$$\mathrm{E}_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right[\qquad \mathrm{E}_2 = \left[0, \frac{1}{4}\right[\sqcup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$$
$$\mathrm{E}_3 = \left[0, \frac{1}{8}\right[\sqcup \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right[\sqcup \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right[\sqcup \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right[\qquad \cdots$$
$$\mathrm{E}_n = \bigsqcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{2k+1}{2^n}\right[$$

(Ces ensembles sont les *ensembles de Rademacher*.) Autrement dit, E_n est l'ensemble des éléments de $[0,1[$ dont le développement dyadique propre (c'est-à-dire qui n'a qu'un nombre fini de bits égaux à 1) a un n-ième bit égal à 0. Évidemment, $\lambda[\mathrm{E}_n] = 1/2$. Par ailleurs, la description des E_n implique facilement que si $n_1, \ldots, n_k$ sont des entiers tous distincts, on a

$$\lambda\left(\mathrm{E}_{n_1} \cap \mathrm{E}_{n_2} \cap \cdots \cap \mathrm{E}_{n_k}\right) = 2^{-k}.$$

(Les amateurs de probabilité auront peut-être reconnu la notion d'*événements indépendants*.) En particulier, toute sous-famille infinie des (E_n) a une intersection négligeable.

30. **Vrai.** L'hypothèse implique directement que $\lambda\left(\limsup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_n\right) \geq \mathrm{C}$. En particulier, $\limsup \mathrm{E}_n$ est non vide. Or, par définition, tout élément de cette limite supérieure appartient à une sous-famille infinie des (E_n) qui ne peut donc pas être vide.

31. **Vrai.** Une telle mesure doit donc valoir 1/2 sur les ensembles de Rademacher. En en prenant une intersection adéquate, on voit que cela implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [\![0, 2^n - 1]\!], \mu\left(\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right[\right) = 2^{-n}.$$

Ces intervalles dyadiques engendrant la tribu borélienne de $[0,1]$ (cf. TD 1, exercice 5), on voit aisément que cela implique $\lambda = \mu$.

32. **Faux.** On peut prendre par exemple $\mathrm{X} = [-\pi, \pi]$ et $f_n(x) = \sin(nx)$. On a alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \pi \text{ et } \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx - \sin mx)^2\,dx = 2\pi.$$

33. **Faux.** Considérer par exemple $f(x) = x^{-1/2}$ (prolongée arbitrairement en 0).
34. **Vrai.** C'est une conséquence de l'inégalité de Hölder et du fait que la mesure de $[0,1]$ est finie.
35. **Faux pour $p < \infty$.** On considère une énumération $(\mathrm{I}(k))_{k\in\mathrm{N}}$ des intervalles dyadiques de sorte que $\mathrm{I}(2^l), \ldots, \mathrm{I}(2^{l+1}-1)$ soient les 2^l intervalles dyadiques de longueur 2^{-l}. La suite des indicatrices $(\mathbb{1}_{\mathrm{I}(k)})$ fournit un contre-exemple.

    Vrai pour $p = \infty$. Soit $(f_n)_n$ convergeant vers f dans L^∞. Alors pour tout $k \geq 1$ l'ensemble $\mathrm{N}_k = \left\{ x \,\middle|\, \limsup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\}$ est négligeable et donc $\mathrm{N} = \bigcup_k \mathrm{N}_k$ l'est aussi. On conclut en remarquant que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout x dans le complémentaire de N.
36. **Vrai pour $p = 2$.** C'est le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

    Faux pour $p \neq 2$. $f(x) = g(x) = x$ fournit un contre-exemple. L'affirmation serait vraie en remplaçant la condition $\alpha|f| = \beta|g|$ par $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$.