TD 0 : correction

Exercice 1.— Dénombrabilité : vrai ou faux

1. On a clairement $\mathscr{P}_f(\mathbb{N}) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_{\leqslant i}(\mathbb{N})$, où $\mathscr{P}_{\leqslant i}(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ possédant au plus i éléments. L'application
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^i & \to & \mathrm{P}_{\leqslant i}(\mathbb{N}) \\ (n_1,\dots,n_i) & \mapsto & \{n_1,\dots,n_i\} \end{array}$$
étant clairement surjective, chacun de ces $\mathscr{P}_{\leqslant i}(\mathbb{N})$ est dénombrable, et il en va de même de leur union (dénombrable !) $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$.
Évidemment, $\mathbb{N}$ étant dénombrable, toutes ses parties le sont aussi. On a donc $\mathscr{P}_\omega(\mathbb{N}) = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, dont le cours garantit qu'il est indénombrable.
2. L'ensemble A des suites entières ne prenant qu'un nombre fini de valeurs contient (strictement) l'ensemble des suites ne prenant que les deux valeurs 0 et 1, qui est en bijection naturelle avec les parties de $\mathbb{N}$. L'ensemble A et, *a fortiori*, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ qui le contient sont donc non dénombrables.
En revanche, l'ensemble B des suites stationnaires est dénombrable. Pour le montrer, si $\ell \in \mathbb{Z}$, posons B_ℓ l'ensemble des suites stationnant à ℓ. On a alors
$$\mathrm{B} = \bigcup_{\ell\in\mathbb{Z}} \mathrm{B}_\ell = \bigcup_{\ell\in\mathbb{Z}} \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_{\ell,r},$$
où $\mathrm{B}_{\ell,r} = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall i > r, x_i = \ell\right\}$. L'application $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_0, x_1, \dots, x_r)$ est alors clairement une bijection entre $\mathrm{B}_{\ell,r}$ et $\mathbb{Z}^{r+1}$. L'ensemble B est alors une union dénombrable (indexée par $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$) d'ensembles dénombrables et il est de ce fait dénombrable.
3. Notons S_n l'ensemble des permutations $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\forall m \geqslant n, f(m) = m$. Ces ensembles sont tous finis (ils sont même en bijection avec le groupe symétrique $\mathfrak{S}(n)$), donc $\mathfrak{S}_0(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{S}_n$ est dénombrable.
En revanche, l'ensemble $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ de toutes les bijections de $\mathbb{N}$ dans lui-même n'est pas dénombrable. En effet, notons $\mathrm{P} \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres pairs : on associe à toute partie $\mathrm{A} \subset \mathrm{P}$ la permutation σ_A qui échange n et $n+1$ si $n \in \mathrm{A}$, et qui les fixe si $n \notin \mathrm{A}$. L'application $\mathrm{A} \mapsto \sigma_\mathrm{A}$ fournit alors une injection de l'ensemble des parties de P, non dénombrable, dans $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$.

Exercice 2.— Famille sommable

Soit M le supremum des $\sum_{i\in\mathrm{J}} a_j$ pour J décrivant l'ensemble des parties finies de I et soit, pour $\varepsilon > 0$, $\mathrm{I}_\varepsilon = \left\{i \in \mathrm{I} \,\middle|\, a_i > \varepsilon\right\}$. On a nécessairement $|\mathrm{I}_\varepsilon| \leqslant \mathrm{M}/\varepsilon$ car, si on avait

$|\mathrm{I}_\varepsilon| > \mathrm{M}/\varepsilon$, on pourrait trouver un ensemble fini $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ de cardinal strictement supérieur à M/ε et

$$\sum_{j \in \mathrm{J}} a_j > \mathrm{M}/\varepsilon \cdot \varepsilon > \mathrm{M},$$

ce qui constituerait une contradiction.
Puisque tous les a_i sont > 0, on a $\mathrm{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{I}_{1/n}$. Union dénombrable d'ensembles finis, I est donc dénombrable.

Exercice 3.— Boîte à outils topologique

1. L'ensemble $\mathbb{Q}^n$ étant dense dans $\mathbb{R}^n$, chacun des ouverts U_i contient un élément $r \in \mathbb{Q}^n$. Si on note $r(i)$ un tel élément, on définit ainsi une fonction $r : \mathrm{I} \to \mathbb{Q}^n$. Les ouverts U_i étant disjoints, cette fonction est injective et la dénombrabilité de $\mathbb{Q}^n$ entraîne celle de I.
2. Démontrons directement le deuxième point. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Appelons $\mathscr{F}$ l'ensemble des boules rationnelles de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{F}_\Omega \subset \mathscr{F}$ la partie constituée des boules rationnelles incluses dans Ω. Une boule étant entièrement déterminée par son centre et son rayon, $\mathscr{F}$ est naturellement en bijection avec $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_+^*$ et est donc dénombrable. Il en va alors de même de $\mathscr{F}_\Omega$.

   L'ensemble $\Omega' = \bigcup_{\mathrm{B} \in \mathscr{F}_\Omega} \mathrm{B}$ est alors par construction une union dénombrable de boules rationnelles et il est clairement inclus dans Ω. Il s'agit maintenant de démontrer que $\Omega' = \Omega$.

   Soit donc $x \in \Omega$. Puisque Ω est ouvert, il existe $r > 0$ rationnel tel que $\mathrm{B}(x, r) \subset \Omega$. Soit $x_0 \in \mathbb{Q}^n \cap \mathrm{B}(x, r/4)$. D'après l'inégalité triangulaire, $\mathrm{B}(x_0, r/2) \subset \mathrm{B}(x, r) \subset \Omega$. La boule $\mathrm{B}(x_0, r/2)$ est donc un élément de $\mathscr{F}_\Omega$ contenant x et $x \in \Omega'$.
3. Soit $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}^n$ un fermé et, pour $\varepsilon > 0$, $\mathrm{F}_\varepsilon = \bigcup_{x \in \mathrm{F}} \mathrm{B}(x, \varepsilon)$ l'ensemble des points à distance $< \varepsilon$ de F. Ces ensembles F_ε, union de boules ouvertes, sont des ouverts. Pour démontrer que F est un G_δ, il suffit donc de montrer que

   $$\mathrm{F} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{F}_{1/n}.$$

   Il est déjà clair que $\forall \varepsilon > 0, \mathrm{F} \subset \mathrm{F}_\varepsilon$. Si maintenant $y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{F}$, on peut trouver $n > 0$ tel que $\mathrm{B}(y, 1/n) \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{F}$. En particulier,

   $$\forall x \in \mathrm{F}, \|x - y\| \geqslant 1/n \text{ ce qui implique } x \notin \bigcup_{x \in \mathrm{F}} \mathrm{B}(x, 1/n) = \mathrm{F}_{1/n}.$$

   L'ensemble

   $$\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}^n} \mathbb{R}^n \setminus \{r\} \subset \mathbb{R}^n$$

   est un G_δ sans être un fermé : il démontre donc que la réciproque de la propriété précédente est fausse.

   Enfin, une partie $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert (resp. un F_σ) si et seulement si son complémentaire est un fermé (resp. un G_δ). Les propriétés correspondantes se déduisent donc de celles que nous avons déjà démontrées en passant au complémentaire.

4. D'après la question précédente, tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_i$, où F_i est fermé. On a alors
$$\Omega = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (\mathrm{F}_i \cap \overline{\mathrm{B}}(0,j)),$$
qui est bien une union dénombrable de compacts.

5. Donnons deux exemples de parties dénombrables denses dans $(\mathrm{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, de natures légèrement différentes.

   A. Étant donné une subdivision $0 = r_0 \leqslant r_1 \leqslant \cdots \leqslant r_n = 1$ de $[0,1]$ constituée de points rationnels et des valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$ rationnelles, on peut définir une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ valant x_i en r_i et affine sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$. On obtient ainsi un ensemble dénombrable $\mathrm{D} \subset \mathrm{C}^0([0,1])$ constitué de fonctions affines par morceaux.

      Démontrons qu'il est dense : soit $f \in \mathrm{C}^0([0,1])$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue. On peut donc trouver $\eta > 0$ tel que $|y - x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Soit alors n un entier tel que $1/n \leqslant \eta$ et, pour $0 \leqslant i \leqslant n$, un rationnel r_i tel que $|r_i - f(i/n)| \leqslant \varepsilon$. La subdivision $0 \leqslant 1/n \leqslant \cdots \leqslant (n-1)/n \leqslant 1$ et les valeurs (r_i) définissent ainsi une fonction $g \in \mathrm{D}$. Si $x \in [0,1]$ est compris entre i/n et $(i+1)/n$, on a donc
$$|f(x) - r_i| \leqslant |f(x) - f(i/n)| + |f(i/n) - r_i| \leqslant 2\varepsilon,$$
      les majorations provenant respectivement de l'uniforme continuité et de la définition de r_i.

      De la même façon, $|f(x) - r_{i+1}| \leqslant 2\varepsilon$. La fonction g étant affine sur $[i/n, (i+1)/n]$, $g(x)$ est compris entre r_i et r_{i+1}, et on a $|g(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$. On a donc bien $\|f - g\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$ et D est dense dans $\mathrm{C}^0([0,1])$.

   B. Le théorème de Weierstraß affirme que l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans $\mathrm{C}^0([0,1])$. Il suffit donc de démontrer que toute fonction polynomiale est $\|\cdot\|_\infty$-proche d'une fonction polynomiale *à coefficients rationnels* pour obtenir une famille dénombrable dense.

      Soit donc $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ une fonction polynomiale et $\varepsilon > 0$. Soit $(r_i)_{i=0}^n$ une famille de rationnels tels que $\forall i, |r_i - a_i| \leqslant \varepsilon$ et $g(x) = r_0 + r_1 x + \cdots + r_n x^n$. On a alors, pour tout $x \in [0,1]$,
$$|f(x) - g(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |x|^i \cdot |a_i - r_i| \leqslant (n+1)\varepsilon,$$
      ce qui conclut.

      Remarque : l'apparition de $n+1$ dans l'estimation précédente pourrait faire craindre une arnaque. Il n'en est rien : on vient de montrer que toute application polynomiale est approchée par des éléments de D. Même si la qualité de cette approximation dépend du degré de l'application, cela prouve que $f \in \overline{\mathrm{D}}$. L'adhérence $\overline{\mathrm{D}}$ contient donc toutes les applications polynomiales et *ipso facto* leur adhérence, dont le théorème de Weierstraß nous assure qu'il s'agit de $\mathrm{C}^0([0,1])$ tout entier.

6. Par exemple, l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites bornées est un espace vectoriel normé non séparable quand on le munit de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |u_i|.$$

   En effet, à toute partie $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$ correspond une suite indicatrice χ_{A} telle que $\chi_{\mathrm{A}}(i) = 1$ si $i \in \mathrm{A}$ et 0 sinon. Ces suites sont toutes deux à deux à distance 1 : $\mathrm{A} \neq \mathrm{B} \Rightarrow \|\chi_{\mathrm{A}} - \chi_{\mathrm{B}}\|_\infty = 1$, ce qui implique que les boules de rayon 1/3 centrées en les χ_{A} sont une famille non dénombrable de boules disjointes.

   Or, dans un espace séparable, une telle famille ne peut pas exister (la première question de l'exercice montrait ce fait pour $\mathbb{R}^n$, mais n'utilisait que la séparabilité.)

Exercice 4.— Points de discontinuité

1. En tout point $x \in \mathbb{R}$, une fonction croissante admet des limites à gauche et à droite :

$$f(x^-) = \sup_{]-\infty, x[} f \text{ et } f(x^+) = \inf_{]x, +\infty[} f$$

   et ces deux limites coïncident si et seulement si la fonction f est continue en x. Cela permet de définir une fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Disc}(f) & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & r \in \mathbb{Q} \cap]f(x^-), f(x^+)[\end{array}$$

   entre l'ensemble des points de discontinuité de f et l'ensemble des nombres rationnels, évidemment injective. En particulier, l'ensemble $\mathrm{Disc}(f)$ est dénombrable.

   L'indicatrice des rationnels $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, discontinue en tout point, montre que la conclusion est fausse pour une fonction quelconque.
2. Par convexité de f, les points de discontinuité de f' sont exactement les points de discontinuité de f'_g, où f'_g est la dérivée à gauche de f, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'_g(x) = \lim_{y \to x; y < x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

   Toujours par convexité, cette fonction f'_g est croissante, et d'après la question précédente, elle n'a qu'un nombre dénombrable de discontinuités.
3. On dit que x_0 est un point de discontinuité de premier espèce si f n'est pas continue en x_0 et si les limites à gauche et à droite de f en x_0 existent. On montre d'abord que si une fonction f est réglée alors tout point de discontinuité de f est de première espèce.

   Soit x_0 un point de discontinuité de f appartenant à un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit φ une fonction en escalier telle que :

$$\forall x \in [a, b],\ |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

   Il existe $\alpha > 0$ tel que φ soit constante sur $]x_0, x_0 + \alpha[$, ce qui entraîne

$$\forall x, y \in]x_0, x_0 + \alpha[\,,\ |f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - f(y)| < 2\varepsilon.$$

On en déduit d'après le critère de Cauchy pour les fonctions que $f(x_0^+)$, la limite à droite de f en x_0 existe. Le même raisonnement montre l'existence de la limite à gauche $f(x_0^-)$.
Soit $\varepsilon > 0$. On définit une fonction $\omega(f, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ par

$$\omega(f, x) = \max(|f(x^-) - f(x)|, |f(x) - f(x^+)|).$$

On considère l'ensemble $\mathrm{A}_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \omega(f, x) \geqslant \varepsilon\right\}$. On va montrer que, pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{A}_\varepsilon \cap [a, b]$ est fini.
Supposons par l'absurde qu'il soit infini. $\mathrm{A}_\varepsilon \cap [a, b]$ étant compact, il en existe un point d'accumulation $x \in [a, b]$, et il existe une suite (x_n) de points distincts de A_ε qui converge vers x. S'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $x_n < x$, on peut, quitte à extraire une sous-suite, supposer : $x_n < x$ pour tout n. Comme f admet une limite à gauche en x, il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall y \in \,]x - \alpha, x[\,,\ |f(y) - f(x^-)| < \varepsilon/3$.
Comme (x_n) converge vers x par valeurs inférieures, il existe un entier n tel que $x - \alpha < x_n < x$. On a donc l'inégalité :

$$\forall y \in \,]x - \alpha, x_n[\,,\ |f(y) - f(x_n)| \leqslant |f(y) - f(x^-)| + |f(x^-) - f(x_n)| < 2\varepsilon/3,$$

et en faisant tendre y vers x_n, on en déduit $|f(x_n^-) - f(x_n)| \leqslant 2\varepsilon/3$. De même, l'inégalité

$$\forall y \in \,]x_n, x[\,,\ |f(y) - f(x_n)| \leqslant |f(x_n) - f(x^-)| + |f(x^-) - f(y)| < 2\varepsilon/3,$$

conduit par passage à la limite à $|f(x_n) - f(x_n^+)| \leqslant 2\varepsilon/3$. On a donc $\omega(f, x_n) \leqslant 2\varepsilon/3$ et $x_n \notin \mathrm{A}_\varepsilon$, ce qui est absurde. Dans le cas où il existe une infinité de valeurs pour lesquelles $x_n > x$, on aboutirait de la même manière à une absurdité en utilisant la continuité à droite de f en x. L'ensemble $\mathrm{A}_\varepsilon \cap [a, b]$ est fini.
La fonction f est discontinue en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\omega(f, x) > 0$. De plus, $\mathbb{R}$ est union dénombrable de segments. L'ensemble D des points de discontinuité de f est donc égal à

$$\mathrm{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{A}_{1/n} \cap [-n, n],$$

réunion dénombrable d'ensembles finis, donc est dénombrable.