TD 3 : mesure de Lebesgue

Dans toute la suite, on admet l'existence de la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire l'existence et l'unicité d'une mesure λ sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que

$$\lambda\left(\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[\right) = (b_1 - a_1)\cdots(b_d - a_d).$$

Exercice 1.— Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$: vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. On demande, suivant les cas, une preuve ou un contre-exemple.

1. Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de boréliens de $\mathbb{R}$ d'intersection vide. Alors
$$\lambda(\mathrm{A}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
2. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide. Alors $\lambda(\mathrm{A}) = 0$.
3. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Alors $\lambda(\mathrm{A}) > 0$.
4. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Alors $\lambda(\mathrm{K})$ est finie.

Exercice 2.— Exemple de Vitali

Soit $\sim$ la relation d'équivalence définie sur $\mathbb{R}$ par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Justifier que chaque classe rencontre l'intervalle $[0,1]$. On forme l'ensemble V en prenant dans chaque classe d'équivalence un représentant dans $[0,1]$. On obtient donc une partie $\mathrm{V} \subset [0,1]$ intersectant en un unique point chaque classe d'équivalence de $\sim$. Montrer que V n'est pas borélien.

Exercice 3.— Ensembles de Cantor

(a) On définit *l'ensemble triadique de Cantor* K_3 de la manière suivante : $\mathrm{K}_3^{(0)}$ est l'intervalle $[0,1]$, $\mathrm{K}_3^{(1)}$ est obtenu en découpant $\mathrm{K}_3^{(0)}$ en trois intervalles de même taille et en ne gardant que les deux intervalles (fermés) extrêmes ($\mathrm{K}_3^{(1)} = [0,1/3] \cup [2/3,1]$), $\mathrm{K}_3^{(2)}$ est obtenu en faisant subir le même sort aux (deux) intervalles constituant $\mathrm{K}_3^{(1)}$ ($\mathrm{K}_3^{(2)} = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$). On construit ainsi par récurrence des compacts $\mathrm{K}_3^{(n)}$ formés de 2^n intervalles. Ces compacts sont emboîtés et on pose $\mathrm{K}_3 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_3^{(n)}$. Calculer la mesure de Lebesgue de l'ensemble triadique de Cantor.

(b) On généralise la construction précédente : pour n'importe quelle suite de nombres $\lambda_n \in]0,1[$, on définit les compacts $\mathrm{K}^{(n)}$ par récurrence en partant de $\mathrm{K}^{(0)} = [0,1]$ et en passant de $\mathrm{K}^{(n)}$ à $\mathrm{K}^{(n+1)}$ en ôtant à chacun des 2^n intervalles I formant $\mathrm{K}^{(n)}$ l'intervalle ouvert central de longueur $\lambda_n \cdot \lambda(\mathrm{I})$. On pose enfin $\mathrm{K} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n$. L'exemple de la question précédente correspond à la suite constante $\forall n, \lambda_n = 1/3$. Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1[$, on peut construire par ce procédé un compact de mesure α.

FIGURE 1 – K_3 : premières étapes de construction (source : wikipédia)

(c) Montrer que les compacts précédents sont homéomorphes à l'espace $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de l'exercice 6 du TD 1.

Exercice 4.— Fonctions de répartition

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ finie sur les compacts.

(a) Montrer que la fonction

$$\mathrm{F} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \mu([0,x[) \end{array}$$

est bien définie, croissante et continue à gauche. On dit que F est la *fonction de répartition de μ.*

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit continue.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même.

(d) Soit $\mathrm{F} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante et continue à gauche et telle que $\mathrm{F}(0) = 0$. Montrer qu'il existe une unique mesure μ sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ dont F soit la fonction de répartition.

Exercice 5.— Propriétés d'invariance de la mesure de Lebesgue

(a) Montrer que la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$ est invariante par translation.

(b) Soit μ une mesure définie sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ invariante par translation et telle que $\mu\left([0,1[^d\right) = r < \infty$. Montrer que $\mu = r\lambda$.

(c) Soit E un borélien de $\mathbb{R}^d$ et $\mathrm{A} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un endomorphisme. Montrer que

$$\lambda(\mathrm{A}(\mathrm{E})) = |\text{dét}\,\mathrm{A}| \cdot \lambda(\mathrm{E}).$$

(d) On note $\mathrm{E} = \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \max_{[0,1]} |f|$. Montrer qu'il n'existe pas sur E de mesure μ non nulle vérifiant les propriétés suivantes :
- μ est invariante par translation ;
- Tout point $p \in \mathrm{E}$ admet un voisinage de μ-mesure finie.