TD 4 : correction

Exercice 1.— Fonctions presque nulles

On considère la suite d'ensembles mesurables $A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$.
Par hypothèse, ils sont tous de mesure nulle :

$$0 = \int_{A_n} f \, d\lambda \geq \frac{1}{n} \mu(A_n).$$

En outre, puisque f est positive, l'ensemble des points où elle est non nulle est exactement

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) > 0 \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Cet ensemble (mesurable) est donc de mesure nulle et f est nulle presque partout.
Si f n'est plus supposée positive, la conclusion tient toujours : les ensembles

$$E_+ = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) > 0 \right\} \qquad E_- = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) < 0 \right\}$$

sont des boréliens de $\mathbb{R}$. Les fonctions $f_\pm = f \cdot \mathbb{1}_{E_\pm}$ sont alors positive et négative, respectivement, et vérifient les hypothèses de l'exercice

$$\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \int_B f_\pm \, d\lambda = \int_{B \cap A_\pm} f \, d\lambda = 0.$$

On a donc $f_\pm = 0$ et $f = 0$.

Exercice 2.— Lemme des moyennes

Soit $\Omega = X \setminus F$. On va montrer que $\nu\left(g^{-1}[\Omega]\right) = 0$.
Comme tout ouvert de $\mathbb{C}$, Ω est une réunion dénombrable de boules ouvertes : $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$.
On a alors $g^{-1}[\Omega] = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} g^{-1}[B_i]$. Il suffit donc de démontrer que si $B = B(a, r) \subset \Omega$ est une boule, alors $\nu(g^{-1}[B]) = 0$.
Notons $A = g^{-1}(B)$. Alors A est de mesure finie car ν est finie. Supposons par l'absurde $\nu(A) > 0$. Par hypothèse, $\frac{1}{\nu(A)} \int_A f \; d\nu \in F$. Or :

$$\left| \frac{1}{\nu(A)} \int_A f \; d\nu - a \right| = \left| \frac{1}{\nu(A)} \int_A (f - a) \; d\nu \right| \leq \frac{1}{\nu(A)} \int_A |f - a| \; d\nu < r.$$

On remarque qu'on a bien l'intégrabilité de la fonction $f - a$, car f est intégrable et que A est de mesure finie. On aboutit donc à une contradiction et le résultat est démontré.

Exercice 3.— Autour de l'inégalité de Čebyšëv

L'énoncé de l'exercice ne fait intervenir que la valeur absolue $|f|$ (on rappelle qu'une fonction est intégrable si et seulement si sa valeur absolue l'est). Quitte à remplacer f par $|f|$, on suppose donc dans la suite $f \geq 0$. On rappelle que si P est une propriété, le *crochet d'Iverson* [P] vaut 1 si P est vraie et 0 sinon.

(a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \mathrm{X}$, on a :

$$p \cdot [x \in \mathrm{B}_p] \leq f(x) \cdot [x \in \mathrm{B}_p] \leq (p+1) \cdot [x \in \mathrm{B}_p].$$

D'où, par croissance de l'intégrale :

$$p\mu(\mathrm{B}_p) \leq \int_{\mathrm{B}_p} f d\mu \leq (p+1)\mu(\mathrm{B}_p).$$

Or, on remarque que $\bigsqcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_p = \mathrm{X}$ et, si f est intégrable, $\int_{\mathrm{X}} f d\mu = \sum_{p\geq 0} \int_{\mathrm{B}_p} f d\mu$.

En sommant les inégalités, on obtient donc : $\sum_{p\geq 0} p\mu(\mathrm{B}_p) \leq \int_{\mathrm{X}} f d\mu < +\infty$.

(b) On remarque que :

$$\mathrm{A}_p = \bigsqcup_{q\geq p} \mathrm{B}_q. \tag{1}$$

On a donc

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \mu[\mathrm{A}_p] = \sum_{p\in\mathbb{N}^*} \sum_{q\in\mathbb{N}} [q \geq p]\, \mu[\mathrm{B}_q] = \sum_{q\in\mathbb{N}} \left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*} [p \leq q] \right) \mu[\mathrm{B}_q] = \sum_{q\in\mathbb{N}} q\mu[\mathrm{B}_q] < \infty.$$

Remarquons que rien n'empêche que A_0 et B_0 soient de mesure infinie.
Pour la convergence de $(p\mu(\mathrm{A}_p))$, on utilise à nouveau la décomposition (1) :

$$\begin{aligned} p\mu(\mathrm{A}_p) &= p \sum_{q\geq p} \mu(\mathrm{B}_q) \\ &\leq \sum_{q\geq p} q\mu(\mathrm{B}_q) \end{aligned}$$

(c) Montrons que ces deux réciproques sont vraies si μ est finie.
Rappelons l'inégalité : $\int_{\mathrm{B}_p} f d\mu \leq (p+1)\mu(\mathrm{B}_p)$, et supposons que la série $\sum_{p\geq 0} \mu(\mathrm{B}_p)$ converge. On a :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)\mu(\mathrm{B}_p) = \mu(\mathrm{B}_0) + \sum_{p=1}^{+\infty} (p+1)\mu(\mathrm{B}_p) \leq \mu(\mathrm{B}_0) + 2\sum_{p=0}^{+\infty} p\mu(\mathrm{B}_p) < +\infty,$$

où l'on a utilisé le fait que $\mu(\mathrm{B}_0) \leq \mu(\mathrm{X}) < +\infty$.
De même, si $\sum_{p>0} \mu(\mathrm{A}_p)$ converge ce qui précède implique que $\sum p\mu(\mathrm{B}_p)$ converge, et donc que f est intégrable.

Remarque : La démonstration n'utilise que le fait que $\mu(\mathrm{B}_0) < +\infty$, qui est une condition moins forte. On pourrait même, de manière tout aussi simple, montrer que la condition suivante, encore plus faible, suffit : $\int_{\mathrm{B}_0} f\, d\mu < +\infty$.

Exercice 4.— Concentration, évanescence, bosse glissante

Dans les trois cas, les suites de fonctions ont une intégrale constante mais tendent vers 0. L'hypothèse de domination dans le théorème de convergence dominée empêche donc ces trois phénomènes (autrement dit, aucune de ces trois suites de fonctions n'est majorée par une fonction intégrable).

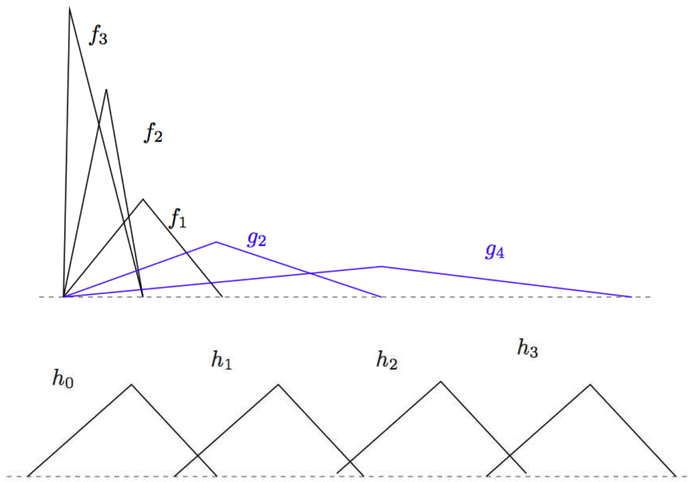

FIGURE 1 – Concentration des f_n, évanescence des g_n, bosse glissante des h_n (source : cours de C. Villani)

Exercice 5.— Sommation par tranches

Contrairement à ce que suggère l'énoncé, on ne va pas démontrer les égalités pour les fonctions étagées, même si elles ne seront pas très loin. On notera simplement $\{f \geq t\}$ au lieu de $\left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, f(x) \geq t\right\}$.

Nous allons démontrer successivement les deux égalités :

(i) $\displaystyle\int_{\mathrm{X}} f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f > t\})\, dt.$

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f > t\})\, dt = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mu(\{f \geq 2^{-n}k\}).$

Au boulot !

(i) Commençons par deux définitions

$$\mathrm{A}_{k,n} = \left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, f(x) \geq \frac{k}{2^n}\right\}.$$

$$f_n = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} 2^{-n} \mathbb{1}_{\mathrm{A}_{k,n}}.$$

Autrement dit, $f_n(x) = d_n^-(f(x))$, où $d_n^-(t)$ est le plus petit élément de $2^{-n}\mathbb{N}$ inférieur ou égal à t. Avec cette formulation, il est évident que la suite de fonctions (f_n) est croissante et converge simplement vers f.

L'intégrale de ces fonctions vaut

$$\int_X f_n \, d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} 2^{-n} \mu(\{f \geq 2^{-n}k\}) \ :$$

en effet, le théorème de convergence monotone permet d'intervertir somme infinie et intégrale dans le cas d'une suite de fonctions positives.

D'après le théorème de convergence monotone (encore !), on a donc

$$\int_X f_n \, d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} 2^{-n} \mu(\{f \geq 2^{-n}k\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f \, d\mu.$$

(ii) De même, on définit la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par $\varphi(t) = \mu(\{f > t\})$. C'est une fonction décroissante (donc mesurable). Posons également, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & t \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right[& \mapsto & \mu\left(\left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \geq \dfrac{k+1}{2^n}\right\}\right). \end{array}$$

Autrement dit,

$$\varphi_n(t) = \mu\left(\left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \geq d_n^+(t)\right\}\right),$$

où $d_n^+(t)$ est le plus petit élément de $2^{-n}\mathbb{N}$ strictement supérieur à t.

La suite $(d_n^+(t))_n$ converge donc vers t en décroissant et en restant tout le temps $> t$.

La suite de fonctions (φ_n) est donc croissante et converge vers

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \geq d_n(t)^+\right\}\right) = \mu\left(\left\{x \in X \,\middle|\, f(x) > t\right\}\right) = \varphi(t).$$

D'après le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_n(t) \, dt &= \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-n} \mu\left(\left\{f \geq \frac{k+1}{2^n}\right\}\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} 2^{-n} \mu\left(\left\{f \geq \frac{k}{2^n}\right\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f > t\}) \, dt. \end{aligned}$$

Exercice 6.— Lemme de Scheffé

On a pour tout $x \in X$, $\min(f, f_n) = \dfrac{f + f_n}{2} - \dfrac{|f - f_n|}{2}$, donc

$$\int_X |f - f_n| \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X f_n \, d\mu - 2 \int_X \min(f, f_n) \, d\mu.$$

Or, la suite de fonctions $\min(f, f_n)$ converge presque partout vers f et est dominée par f intégrable. D'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\int_{\mathrm{X}} \min(f, f_n)\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathrm{X}} f\, d\mu$$

et

$$\int_{\mathrm{X}} |f - f_n|\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exercice 7.— Régularisation de Hadamard

(a) On va appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale pour montrer que F est continue sur $[0,1]$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 \underbrace{\mathbb{1}_{[0,x]} f(t)}_{\varphi(x,t)}\, dt.$$

On fixe $x_0 \in [0,1]$.

(i) Pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi(x,.)$ est mesurable sur $[0,1]$.

(ii) Pour tout $t \in [0,1] \setminus \{x_0\}$ (et donc presque pour tout t), $\varphi(.,t)$ est continue en x_0.

(iii) Pour tout $(x,t) \in [0,1] \times [0,1]$, on a $|\varphi(x,t)| \leq |f(t)|$.

Le théorème de continuité conclut que F est continue sur $[0,1]$. On montre de la même manière que F est continue sur $[-1,0]$ en écrivant pour $x \in [-1,0]$:

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)dt = -\int_{-1}^0 \mathbb{1}_{[x,0]} f(t)dt.$$

(b) Soit $x \in [-1,1]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que $|y - x| \leq \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$. On a alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leq \eta$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt\right) - f(x)\right| \\ &= \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\, dt\right| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

donc F est bien dérivable de dérivée f.

(c) On déduit de ce qui précède que si φ est une fonction de classe C^1, les fonctions (de classe C^1) $x \mapsto \int_0^x \varphi'(t)\, dt$ et φ ont la même dérivée et coïncident donc à une constante additive près. En particulier

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \int_0^x \varphi'(t)\, dt = x\int_0^1 \varphi'(ux)\, du.$$

Il suffit donc de montrer que la fonction $\theta : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi'(ux)\,du$ est continue. Or, la fonction $(x, u) \mapsto \varphi'(ux)$ est continue, intégrable en u et dominée (indépendamment de x) par une fonction intégrable (en fait, la borne supérieure de $|\varphi'|$ convient). Le théorème de continuité sous le signe somme entraîne donc la continuité de θ et le lemme de Hadamard.

(d) On peut montrer de bien des façons que $x \mapsto 1/x$ n'est pas intégrable, mais remarquons que le phénomène de concentration vu à l'exercice 4 en est une manifestation. En effet, la suite de fonctions $f_n = n\mathbb{1}_{]0,1/n]}$ converge simplement vers la fonction nulle alors que son intégrale reste constamment égale à 1. Il faut donc bien que sa domination par la fonction $x \mapsto 1/x$ ne suffise pas à appliquer le théorème de convergence dominée : la fonction n'est donc pas intégrable sur $]0, 1]$. (Remarquons que le phénomène d'évanescence entraîne de la même façon que la fonction n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$).

La question précédente entraîne que

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(0)}{x} + \theta(x).$$

Puisque θ est continue, elle est bornée et donc intégrable. Ainsi, la fonction $x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{x}$ est intégrable exactement quand $x \mapsto \dfrac{\varphi(0)}{x}$ l'est, c'est-à-dire quand $\varphi(0) = 0$.

(e) On a maintenant

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt &= \int_{-1}^{-\varepsilon} \left(\frac{\varphi(0)}{t} + \theta(t)\right) dt + \int_{\varepsilon}^{1} \left(\frac{\varphi(0)}{t} + \theta(t)\right) dt \\
&= \int_{-1}^{-\varepsilon} \theta(t)\,dt + \int_{\varepsilon}^{1} \theta(t)\,dt + \varphi(0)\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{t}\,dt\right) \\
&= \int_{-1}^{-\varepsilon} \theta(t)\,dt + \int_{\varepsilon}^{1} \theta(t)\,dt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int_{-1}^{1} \theta(t)\,dt,
\end{aligned}$$

la dernière convergence étant due au théorème de convergence dominée : si $\varepsilon_n \to 0$, la suite de fonctions $\theta \cdot \mathbb{1}_{[-1,-\varepsilon_n]\cup[\varepsilon_n,1]}$ converge presque partout vers θ en restant dominée par $|\theta|$ intégrable.