TD 4 : intégrale de Lebesgue

Exercice 1.— Fonctions presque nulles

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive mesurable ($\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne). On suppose que, pour tout borélien A, $\int_{\mathrm{A}} f \, d\lambda = 0$. Montrer qu'alors f est nulle presque partout. Le résultat s'étend-il si f n'est plus supposée positive ?

Exercice 2.— Lemme des moyennes

Soit $g : (\mathrm{X}, \mathscr{A}, \nu) \to \mathbb{C}$ intégrable, où ν est une mesure finie. On suppose qu'il existe un fermé $\mathrm{F} \subset \mathbb{C}$ tel que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$ vérifiant $\nu(\mathrm{A}) \in]0, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{\nu(\mathrm{A})} \int_{\mathrm{A}} g \, d\nu \in \mathrm{F}.$$

Montrer que pour presque tout $x \in \mathrm{X}$, $g(x) \in \mathrm{F}$.

Exercice 3.— Autour de l'inégalité de Čebyšëv

Soit $f : (\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ mesurable. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n = \left\{ x \in \mathrm{X} \,\middle|\, |f(x)| > n \right\}$ et $\mathrm{B}_n = \left\{ x \in \mathrm{X} \,\middle|\, n < |f(x)| \leq n+1 \right\}$.

(a) Montrer que si f est intégrable, $\sum_{p \in \mathbb{N}} p \, \mu(\mathrm{B}_p)$ converge.

(b) Montrer que si f est intégrable, $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \mu(\mathrm{A}_p)$ converge et $p \, \mu(\mathrm{A}_p) \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$.

(c) À quelle(s) condition(s) les réciproques sont-elles vraies ?

Exercice 4.— Concentration, évanescence, bosse glissante

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive, nulle en dehors de $[0, 1]$ et d'intégrale 1. On définit les suites de fonctions

$$f_n(x) = n\varphi(nx), \qquad g_n(x) = \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{x}{n}\right), \qquad h_n(x) = \varphi(x - n).$$

Faire des dessins. Comparer le comportement de ces trois suites de fonctions et celui de leurs intégrales.

Exercice 5.— Sommation par tranches

Soit $f : (\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que

$$\int_{\mathrm{X}} f(x) \, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu\left(\left\{ x \in \mathrm{X} \,\middle|\, f(x) > t \right\}\right) dt = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} \mu\left(\left\{ x \in \mathrm{X} \,\middle|\, f(x) \geq \frac{k}{2^n} \right\}\right).$$

(On pourra commencer par traiter le cas d'une fonction étagée à valeurs dans $2^{-n_0}\mathbb{N}$.)

Exercice 6.— Lemme de Scheffé

Soit $(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions positives et intégrables convergeant presque partout vers f intégrable. On suppose en outre que

$$\int_{\mathrm{X}} f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathrm{X}} f \, d\mu.$$

Montrer qu'alors (f_n) converge vers f en norme L^1, c'est-à-dire que

$$\int_{\mathrm{X}} |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(On pourra commencer par vérifier l'identité $\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |b - a|)$ pour a et b deux réels positifs.)

Exercice 7.— Régularisation de Hadamard

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{F}: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt. \end{array}$$

(a) Montrer que F est continue sur $[-1, 1]$.

(b) On suppose dans cette question que f est continue. Montrer qu'alors F est C^1 et que sa dérivée est égale à f.

(c) (Lemme de Hadamard) Soit $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Déduire de la question précédente qu'il existe une fonction continue θ telle que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\theta(x).$$

(d) Montrer que la fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. En déduire dans quels cas la fonction $x \mapsto \varphi(x)/x$ de la question précédente est intégrable sur $[-1, 1]$.

(e) Montrer que dans tous les cas, la quantité

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt$$

converge quand $\varepsilon \to 0$. Sa limite est parfois notée

$$\mathrm{P.f.} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt.$$