# TD 5 : correction

## Exercice 1.— Support d'une fonction

Soit $\mathfrak{U}$ l'ensemble des ouverts U sur lesquels $f$ est nulle presque partout. D'après la définition de $\Omega$, $\mathfrak{U}$ est un recouvrement ouvert de $\Omega$.
En outre, si $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille dénombrable d'ouverts sur chacun desquels $f$ est nulle presque partout, $f$ est nulle sur leur union. En effet,

$$\left\{x \in \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{U}_i \,\middle|\, f(x) \neq 0\right\} = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \left\{x \in \mathrm{U}_i \,\middle|\, f(x) \neq 0\right\},$$

est une union dénombrable d'ensembles négligeables, donc est automatiquement négligeable.
L'exercice est alors un exercice de topologie qui ne dit pas son nom. Il suffit en effet de démontrer que tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a la *propriété de Lindelöf*, c'est-à-dire qu'on peut extraire de tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ un sous-recouvrement dénombrable.
Pour le démontrer, on va utiliser le fait, démontré au TD 0, que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est $\sigma$-compact. Soit donc $(\mathrm{K}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une suite dénombrable de compacts dont l'union est $\Omega$. Par compacité, il existe pour tout $i \in \mathrm{I}$ un sous-recouvrement fini $\mathfrak{U}'_i \subset \mathfrak{U}$ de $\mathrm{K}_i$. L'union $\mathfrak{U}' = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathfrak{U}'_i \subset \mathfrak{U}$ est alors une famille dénombrable d'ouverts recouvrant $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{K}_i = \Omega$.
(On peut également démontrer que pour un espace métrique, la propriété de Lindelöf est équivalente à la séparabilité.)

## Exercice 2.— Boréliens de mesure finie

C'est une conséquence directe de la régularité de la mesure de Lebesgue : en effet, puisque $\lambda(\mathrm{B}) < +\infty$ et que $\lambda(\mathrm{B}) = \inf \left\{\lambda(\mathrm{U}) \,\middle|\, \mathrm{U} \text{ ouvert contenant B}\right\}$, on peut trouver une suite d'ouverts $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ contenant B tels que $\lambda(\mathrm{U}_n) \leq \lambda(\mathrm{B}) + 1/n$. En particulier, leur intersection $\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{U}_n$ est un $\mathrm{G}_\delta$ contenant B et de mesure $\leq \lambda(\mathrm{B}) + 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On a donc $\lambda(\Omega) = \lambda(\mathrm{B})$ et $\Omega \setminus \mathrm{B}$ est négligeable.
La construction du $\mathrm{F}_\sigma$ $\Phi$ se fait de la même façon à l'aide de la régularité intérieure de la mesure de Lebesgue.

## Exercice 3.— Changement de variable et mesure image

(a) On va d'abord montrer le théorème pour les fonctions étagées positives, puis utiliser le théorème de convergence monotone pour prolonger le résultat aux fonctions mesurables positives.
Soit donc $(\mathrm{A}_i)_{i=1}^r$ une famille finie de parties mesurables de Y et $(\alpha_i)_{i=1}^r$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$. On pose

$$f = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbb{1}_{\mathrm{A}_i}.$$

En particulier, on a
$$f \circ \varphi = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbb{1}_{\varphi^{-1}[\mathrm{A}_i]}.$$
On a alors
$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Y}} f \, d\nu &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \nu(\mathrm{A}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mu\left(\varphi^{-1}[\mathrm{A}_i]\right) \\ &= \int_{\mathrm{X}} (f \circ \varphi) \, d\mu.\end{aligned}$$
Pour traiter le cas général, soit donc $f : \mathrm{Y} \to \mathbb{R}_+$ mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions étagées positives convergeant en croissant vers $f$. D'après ce qui précède, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\int_{\mathrm{Y}} f_n \, d\nu = \int_{\mathrm{X}} (f_n \circ \varphi) \, d\mu.$$
La suite de fonctions $(f_n \circ \varphi)$ est clairement croissante, et converge vers $f \circ \varphi$. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone aux deux termes de l'égalité précédente et obtenir le résultat désiré.

(b) Soit maintenant $f : \mathrm{Y} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $f = f_+ - f_-$ la décomposition de $f$ en parties positive et négative. Évidemment, $f_+ \circ \varphi$ et $f_- \circ \varphi$ sont deux fonctions positives sur X dont la différence vaut $f \circ \varphi$. On a donc bien
$$f \ \nu\text{-intégrable} \Leftrightarrow \int_{\mathrm{Y}} f_\pm \, d\nu < +\infty \Leftrightarrow \int_{\mathrm{X}} (f_\pm \circ \varphi) \, d\mu < +\infty \Leftrightarrow (f \circ \varphi) \ \mu\text{-intégrable},$$
l'équivalence centrale étant due à la question précédente. Si les fonctions sont intégrables, l'égalité
$$\int_{\mathrm{Y}} f \, d\nu = \int_{\mathrm{X}} (f \circ \varphi) \, d\mu$$
s'obtient alors simplement en appliquant la question précédente à $f_\pm$.

**Remarque.** Bien que ce résultat (important !) soit bien un théorème de changement de variables, notons qu'il ne fait que déplacer le problème pour obtenir un théorème de changement de variables véritablement utile pour les calculs : pour retrouver le théorème de changement de variables usuel, il faut maintenant décrire explicitement la mesure $\varphi_*\lambda$ quand $\varphi$ est un changement de variables raisonnable (un $\mathrm{C}^1$-difféomorphisme, par exemple).

### Exercice 4.— Continuité de l'opérateur de translation : première étape

Commençons par remarquer que toute fonction continue est mesurable et que, si elle est en outre à support compact, elle est intégrable. L'existence des intégrales qui vont suivre ne pose donc pas de problème.
Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un segment en dehors duquel $f$ est nulle.
Soit $\varepsilon > 0$.

La fonction $f$ étant continue à support compact, le théorème de Heine implique qu'elle est uniformément continue. Soit donc $0 < \eta < 1$ tel que

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Si $|h| < \eta$, on a donc

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{T}_h(f) - f| \, d\lambda = \int_{a-\eta}^{b+\eta} |f(x-h) - f(x)| \, d\lambda(x) \leq (b - a + 2\eta)\varepsilon \leq (b - a + 2)\varepsilon.$$

On a donc obtenu $\mathrm{T}_h(f) \xrightarrow[h \to 0]{\mathrm{L}^1} f$.

**Exercice 5.— Ensembles négligeables et image**

Pour simplifier, nous munirons les espaces euclidiens des normes $\|\cdot\|_\infty$. D'après l'équivalence des normes en dimension finie, le fait d'être lipschitizien pour une fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ne dépend pas de la norme utilisée à la source et au but.

(a) Le point-clef de la preuve est que la dimension des espaces euclidiens a une caractérisation métrique : s'il faut un certain nombre de boules de rayon R pour recouvrir un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il en faudra moralement $(\mathrm{R}/r)^n$ de rayon $r$. (C'est plus ou moins la notion de *dimension de Minkowski*.) Les applications lipschitziennes ayant des effets contrôlés sur les boules, on va utiliser cette idée pour contrôler la mesure de Lebesgue de leur image. Transformons maintenant cette idée en preuve.

Pour montrer que l'image de $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est négligeable, nous allons montrer que l'image des boules (disons, des boules fermées) par $f$ l'est. Comme $\mathbb{R}^n$ est union dénombrable de boules, le résultat s'ensuivra.

Soit donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $f$ soit $k$-lipschitzienne. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, la boule fermée $\overline{\mathrm{B}}(x, \mathrm{R})$ dans $\mathbb{R}^m$ s'écrit comme l'union de $\mathrm{N}^m$ boules de rayon R/N. En outre, puisque $f$ est $k$-lipschitzienne, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et tout $r > 0$,

$$f\left[\overline{\mathrm{B}}^{\mathbb{R}^m}(x, r)\right] \subset \overline{\mathrm{B}}^{\mathbb{R}^n}(f(x), kr).$$

Et on a, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$

$$\overline{\mathrm{B}}^{\mathbb{R}^m}(x, \mathrm{R}) = \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}^m} \overline{\mathrm{B}}^{\mathbb{R}^m}(x_i, \mathrm{R}/\mathrm{N})$$

d'où

$$\begin{aligned} f\left[\overline{\mathrm{B}}^{\mathbb{R}^m}(x, \mathrm{R})\right] &= \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}^m} f\left[\overline{\mathrm{B}}^{\mathbb{R}^m}(x_i, \mathrm{R}/\mathrm{N})\right] \\ &\subset \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}^m} \overline{\mathrm{B}}^{\mathbb{R}^n}(f(x_i), k\mathrm{R}/\mathrm{N}). \end{aligned}$$

Or,

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}^m}\overline{\mathrm{B}}^{\mathbb{R}^n}(f(x_i),k\mathrm{R}/\mathrm{N})\right)\leq\sum_{i=1}^{\mathrm{N}^m}\lambda\left(\overline{\mathrm{B}}^{\mathbb{R}^n}(f(x_i),k\mathrm{R}/\mathrm{N})\right)$$
$$\leq\mathrm{N}^m\left(\frac{2k\mathrm{R}}{\mathrm{N}}\right)^n=(2k\mathrm{R})^n\cdot\mathrm{N}^{m-n}\xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{}0,$$

ce qui entraîne bien que $f\left[\overline{\mathrm{B}}(x,\mathrm{R})\right]$ est négligeable.

(b) En suivant la même idée, nous allons donner une caractérisation métrique des ensembles négligeables.

**Lemme.** Soit $\mathrm{N}\subset\mathbb{R}^n$ un ensemble négligeable et $\varepsilon>0$. Alors N est inclus dans une union de boules dont la somme des volumes est $<\varepsilon$.

Ce résultat entraîne la propriété que nous cherchons : en effet, si $f$ est $k$-lipschitzienne

$$\mathrm{N}\subset\bigcup_{i=1}^{r}\mathrm{B}(x_i,r_i)\Rightarrow f[\mathrm{N}]\subset\bigcup_{i=1}^{r}\mathrm{B}(f(x_i),kr_i),$$

dont la mesure est $\leq k^n\varepsilon$.

Notons par ailleurs que la définition de la mesure de Lebesgue via les mesures extérieures fournit un résultat similaire au lemme, où le mot *boule* (qui signifie ici *cube*, vu la norme utilisée) est remplacé par le mot *pavé*. Or, tout pavé P est inclus dans une union finie de cubes dont la somme des volumes est arbitrairement proche de $\operatorname{vol}\mathrm{P}$ (il suffit de prendre les *cubes dyadiques* de longueur $2^{-k}$ intersectant P). Cela démontre le lemme.

(c) Pour démontrer les propriétés du lemme, il suffit de le faire sur toute boule B, c'est-à-dire de démontrer dans la première question que $f[\mathrm{B}]$ est négligeable pour toute boule B (c'est d'ailleurs ce que l'on a fait) et dans la deuxième que $f[\mathrm{B}\cap\mathrm{N}]$ est négligeable pour toute boule B. Il suffit donc de supposer que $f$ est *localement lipschitzienne*, c'est-à-dire lipschitzienne en restriction à toute boule (mais avec une constante de Lipschitz qui peut dépendre de la boule). Or, toute fonction continûment différentiable est localement lipschitzienne, en vertu du théorème des accroissements finis.

**Remarque.** En revanche, ces propriétés sont fausses pour des applications seulement continues. Pour la première, il suffit de se souvenir de l'existence de *courbes de Peano*, c'est-à-dire d'applications continues surjectives[1] $f:[0,1]\to[0,1]^n$.

Pour la seconde, nous allons invoquer le théorème déjà évoqué dans la correction du TD 3 selon lequel si $\mathrm{K}\subset\mathbb{R}$ est homéomorphe à l'espace de Cantor, il existe un homéomorphisme $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ envoyant K sur l'ensemble triadique de Cantor. Ainsi, si K est un ensemble de Cantor de mesure strictement positive, $\varphi^{-1}$ envoie bien un ensemble négligeable (l'ensemble de Cantor triadique) sur un ensemble qui ne l'est pas (l'ensemble de Cantor gras).

(d) Encore une fois, tout intervalle étant réunion dénombrable d'intervalles bornés, il suffit de démontrer la proposition pour I intervalle borné, disons de longueur 1.

1. Le théorème de Hahn et Mazurkiewicz affirme même que pour tout espace métrique P compact, connexe et localement connexe, il existe une application continue surjective $[0,1]\to\mathrm{P}$.

Si $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\mathrm{C}_\varepsilon = \left\{x \in \mathrm{I} \,\middle|\, |f'(x)| < \varepsilon\right\}$ est ouvert car $f$ est continûment différentiable. On peut donc l'écrire comme une union dénombrable d'intervalles disjoints $(\mathrm{I}_j)_{j\in\mathrm{J}}$. Évidemment, $\sum_{j\in\mathrm{J}} \lambda(\mathrm{I}_j) \leq 1$. D'après le théorème des accroissements finis, chaque $f[\mathrm{I}_j]$ est un intervalle de longueur $\leq \varepsilon\lambda(\mathrm{I}_j)$. L'ensemble $f[\mathrm{C}_\varepsilon]$ est donc mesurable, de mesure

$$\lambda(f[\mathrm{C}_\varepsilon]) \leq \sum_{j\in\mathrm{J}} \varepsilon\lambda(\mathrm{I}_j) \leq \varepsilon.$$

Puisque, pour tout $\varepsilon > 0$, $f[\mathrm{C}] \subset f[\mathrm{C}_\varepsilon]$, cela démontre que $f[\mathrm{C}]$ est négligeable.

**Remarque.** De manière générale, le *théorème de Sard* affirme que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une fonction de classe $\mathrm{C}^r$, avec $r > \max(0, n-m)$, l'image par $f$ de l'ensemble

$$\mathrm{Crit}(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, d_x f \text{ non surjective}\right\}$$

est négligeable. Comme l'hypothèse sur la régularité de $f$ le suggère, la preuve de ce théorème est sensiblement plus délicate dans le cas $n > m > 1$ (le cas $n < m$ est la première question de notre exercice pour les applications de classe $\mathrm{C}^1$).

## Exercice 6.— Escalier du diable

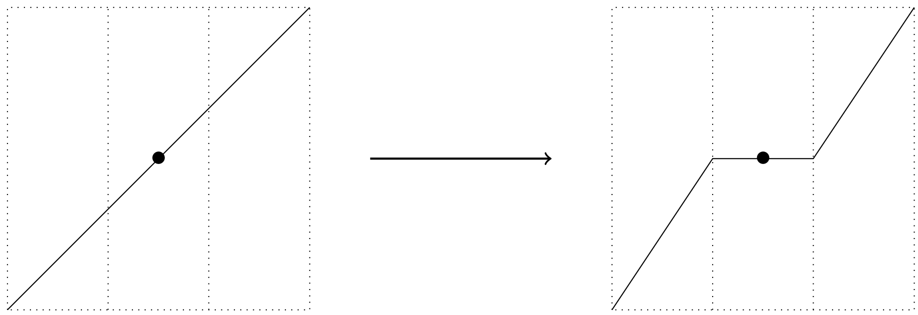

Figure 1 – Procédé de mutation

Justifions que le procédé est bien défini : déjà, la mutation sur un intervalle I ne dépendant que de la restriction de la fonction à I et ne modifiant la fonction que sur I, il est évident que lorsqu'on effectue une suite de mutations sur des intervalles disjoints, le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les effectue.

On démontre immédiatement par récurrence que la fonction $f_n$ est affine, de pente $(3/2)^n$ sur chacun des $2^n$ intervalles de taille $3^{-n}$ qui constituent $\mathrm{K}_3^{(n)}$. En particulier, le procédé de construction de $f_n$ est bien défini ($f_n$ est bien affine sur les intervalles constituant $\mathrm{K}_3^{(n+1)}$, ce qui permet de définir $f_{n+1}$).

En outre, le fait que les mutations effectuées sur $f_n$ modifient le graphe de celle-ci dans des rectangles de base $3^{-n}$ et de hauteur $2^{-n}$ montre directement l'estimation

$$\|f_n - f_{n+1}\|_\infty \leq 2^{-n}.$$

Cette dernière entraîne que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathrm{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. En particulier, elle converge uniformément (et donc simplement) vers une fonction $f$ continue. Celle-ci étant limite de fonctions croissantes, elle est croissante.

Par ailleurs, le complémentaire $\Omega = [0,1] \setminus \mathrm{K}_3$ est une réunion dénombrable d'intervalles. Pour chacun de ces intervalles I, la suite de fonctions $\big((f_n)_{|\mathrm{I}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à une fonction constante $f_{|\mathrm{I}}$ à partir d'un certain rang $k \in \mathbb{N}$. Ces $(f_n)_{n\geq k}$ sont alors tous dérivables et de dérivée nulle sur cet intervalle I, et il en va évidemment de même pour $f$.
Ainsi, la fonction $f$ est dérivable et de dérivée nulle sur $\Omega$, qui est bien de mesure pleine : presque partout, $f$ est dérivable et de dérivée nulle.

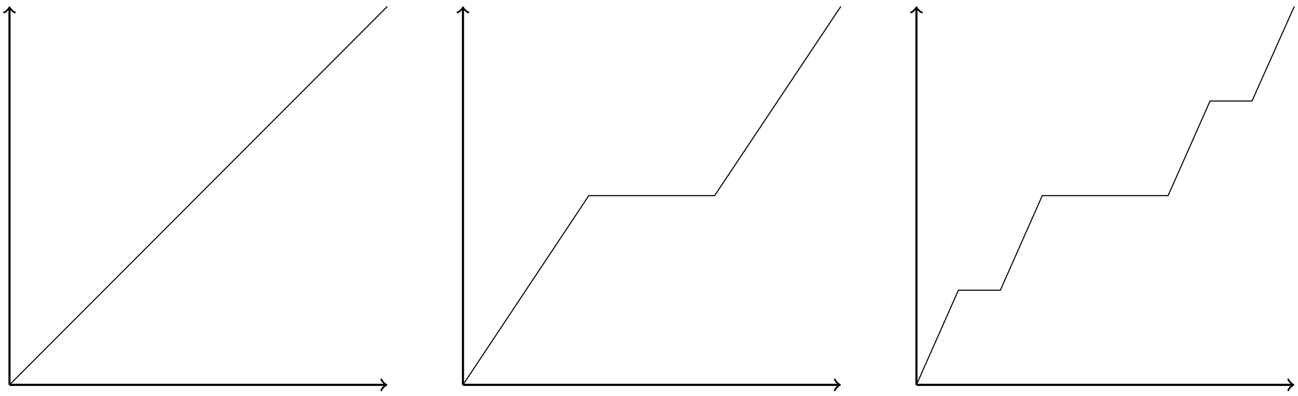

FIGURE 2 – Graphes de $f_0$, $f_1$, $f_2$