TD 5 : intégrale de Lebesgue : quelques propriétés

Exercice 1.— Support d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction borélienne. Soit Ω la réunion de tous les ouverts U tels que $f = 0$ p.p. sur U c'est-à-dire tels que

$$\lambda\left(\left\{x \in \mathrm{U} \,\middle|\, f(x) \neq 0\right\}\right) = 0.$$

Montrer que f est nulle sur Ω preque partout. (Le *support* de f est par définition le fermé $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$).

Exercice 2.— Boréliens de mesure finie

Soit $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borélien de mesure de Lebesgue finie. Montrer qu'il existe un G_δ $\Omega \supset \mathrm{B}$ (resp. un F_σ $\Phi \subset \mathrm{B}$) tel que $\Omega \setminus \mathrm{B}$ (resp. $\mathrm{B} \setminus \Phi$) soit négligeable.

Exercice 3.— Changement de variable et mesure image

Soit X et Y deux espaces mesurables et $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application mesurable. On suppose X muni d'une mesure μ. En particulier, on obtient ainsi la mesure image $\nu = \varphi_*\mu$ sur Y.

(a) Pour toute fonction $f : \mathrm{Y} \to \mathbb{R}_+$ mesurable, montrer que

$$\int_{\mathrm{Y}} f \, d(\varphi_*\mu) = \int_{\mathrm{X}} (f \circ \varphi) \, d\mu.$$

(b) Pour toute fonction $f : \mathrm{Y} \to \mathbb{R}$ mesurable, montrer que $f \circ \varphi$ est intégrable sur (X, μ) si et seulement si f est intégrable sur $(\mathrm{Y}, \varphi_*\mu)$ et que dans ce cas, l'égalité de la question précédente reste vraie.

Exercice 4.— Continuité de l'opérateur de translation : première étape

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact. On définit, pour $h \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{T}_h(f) : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x-h). \end{array}$$

Montrer que $\mathrm{T}_h(f)$ tend vers f en norme L^1 quand h tend vers 0, i.e. que :

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{T}_h(f) - f| \, d\lambda \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Exercice 5.— Ensembles négligeables et image

(a) Montrer que si $m < n$ et que $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application lipschitzienne, l'image de f est négligeable.

(b) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application lipschitzienne. Montrer que l'image par f d'un ensemble négligeable est négligeable.

(c) Montrer que les résultats des deux questions précédentes restent valables pour des fonctions continûment différentiables.

(d) Soit $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application continûment différentiable. On note $\mathrm{Crit}(f) = \left\{ x \in \mathrm{I} \,\middle|\, f'(x) = 0 \right\}$ l'ensemble de ses points critiques. Démontrer que l'ensemble $f\left[\mathrm{Crit}(f)\right]$ des *valeurs critiques* de f est négligeable.

Exercice 6.— Escalier du diable

On rappelle que l'ensemble triadique de Cantor est obtenu en prenant l'intersection d'étapes de construction $\mathrm{K}_3^{(n)}$, constituées chacune de 2^n segments disjoints de taille 3^{-n}.
Définissons également un procédé de modification des fonctions affines par morceaux : si f est une fonction affine par morceaux qui est affine en restriction à un intervalle I, on définit la *mutation* de f sur I comme suit : on découpe l'intervalle I en trois intervalles de même taille $\mathrm{I}_0, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$. Le milieu m de I_1 est donc également celui de I. La mutation de f est alors l'unique fonction coïncidant avec f à l'extérieur de I, égale à $f(m)$ sur I_1 et affine sur I_0 et I_2.
On définit alors par récurrence une suite de fonctions $(f_n : [0,1] \to [0,1])_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $f_0 = \mathrm{id}$ et en obtenant f_{n+1} par mutation de f_n sur chacun des 2^n intervalles constituant $\mathrm{K}_3^{(n)}$.
Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, tracer les graphes de f_0, f_1, f_2. Montrer que cette suite converge uniformément vers une fonction f continue, croissante, dérivable et de dérivée nulle presque partout.

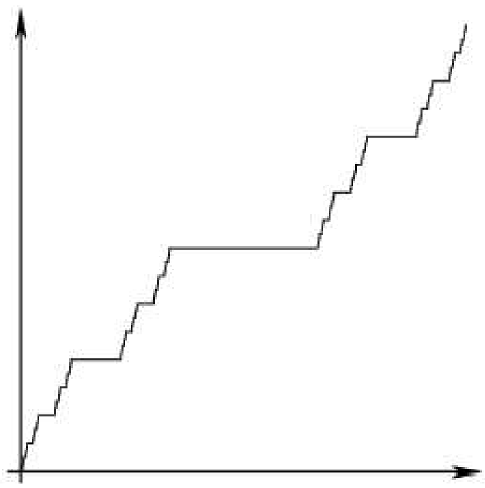

FIGURE 1 – Escalier du diable (source : wikipédia)