TD 6 : correction

Exercice 1.— Dérivabilité presque partout

Attention ! On ne peut pas appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale, bien que l'hypothèse $f \in \mathrm{L}^1([0,1])$ le suggère.
En effet, si on voulait l'appliquer, il faudrait que l'on vérifie que : pour presque tout t, $x \to f(xt)$ est dérivable sur $]0,1]$. Or, ce n'est pas le cas car f n'est dérivable que presque partout.
Ainsi, on utilise le changement de variable $u = xt$ (qui est linéaire, donc très simple) :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du.$$

D'après le TD 4 (exercice 7), la fonction $x \to \int_0^x f(u)du$ est dérivable sur $[0,1]$, de dérivée f. Ainsi, F est dérivable sur $]0,1]$, de dérivée :

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{x^2}\left(xf(x) - \int_0^x f(t)dt\right).$$

Exercice 2.— La fonction Γ d'Euler

L'application par récurrence du théorème de dérivation sous le signe somme ne pose pas réellement de problème. En guise d'excuse pour ne pas en donner le corrigé complet, remarquons que le théorème de dérivation au sens complexe sous le signe somme, que vous verrez au second semestre, permet de démontrer directement que la fonction Γ définie sur $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Ré}\, z > 0\right\}$ est holomorphe, donc de classe C^∞.

Exercice 3.— Transformée de Laplace

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\mathrm{L}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{xt}\, d\mu(t).$$

(a) D est non vide puisque $\mathrm{L}(0) = 1$ (μ est une mesure de probabilité). Vérifions que D est un ensemble convexe de $\mathbb{R}$. Si $x, x' \in \mathrm{D}$ et $\theta \in [0,1]$, alors la convexité de la fonction exponentielle donne, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(\theta tx + (1-\theta)tx') \leq \theta \exp(tx) + (1-\theta)\exp(tx')$. En intégrant sur $\mathbb{R}$, on obtient finalement :

$$\mathrm{L}(\theta x + (1-\theta)x') \leq \theta \mathrm{L}(x) + (1-\theta)\mathrm{L}(x') \tag{1}$$

Ce qui conclut que $\theta x + (1-\theta)x' \in \mathrm{D}$.

(b) Dans la question précédente, l'inégalité (1) montre aussi que L est convexe.

(c) Soit $x, x' \in \mathrm{D}$, et $\theta \in [0,1]$. En appliquant l'inégalité de Hölder aux fonctions f et g définies par $f(t) = \exp(tx)$ et $g(t) = \exp(tx')$ avec les exposants conjugués $\frac{1}{\theta}$ et $\frac{1}{1-\theta}$, on obtient :
$$\int f(t)^\theta g(t)^{1-\theta} d\mu \leq \left[\int f(t) d\mu\right]^\theta \left[\int f(t) d\mu\right]^{1-\theta}.$$
C'est à dire $\mathrm{L}(\theta x + (1-\theta)x') \leq \mathrm{L}(x)^\theta \mathrm{L}(x')^{1-\theta}$. On obtient le résultat voulu en passant cette dernière inégalité au log.

(d) Soit $x_0 \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - 2\varepsilon, x_0 + 2\varepsilon] \subset \mathrm{D}$. On va montrer que L est C^∞ sur $\mathrm{I} =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Dans l'application du théorème de dérivation de Lebesgue, la seule difficulté consiste ici à dominer $|t|^n e^{tx}$ sur $\mathbb{R}$ par une fonction intégrable indépendante de x. Pour cela, on distingue les cas $t \geq 0$ et $t < 0$.
$$\begin{aligned} &\text{Si } t \geq 0, \quad t^n e^{tx} \leq t^n e^{-\varepsilon t} e^{(x_0+2\varepsilon)} \leq \mathrm{M}_n e^{(x_0+2\varepsilon)t}. \\ &\text{Si } t < 0, \quad |t|^n e^{tx} \leq t^n e^{+\varepsilon t} e^{(x_0-2\varepsilon)} \leq \mathrm{M}_n e^{(x_0-2\varepsilon)t}. \end{aligned}$$
On a noté dans les deux estimations ci-dessus $\mathrm{M}_n = \sup_{t\geq 0} t^n e^{-\varepsilon t} < 0$. Ainsi $|t|^n e^{tx}$ est dominé par $\mathbb{1}_{t\geq 0} \mathrm{M}_n e^{(x_0+2\varepsilon)t} + \mathbb{1}_{t<0} \mathrm{M}_n e^{(x_0-2\varepsilon)t}$, et on peut ensuite facilement appliquer le théorème de dérivation.

Exercice 4.— Théorème de convergence dominée L^p

Tout d'abord, la fonction f est dans L^p car, en passant à la limite dans l'inégalité, on voit que la fonction f est dominée par g et donc : $|f|^p \leq g^p$, qui est une fonction intégrable par hypothèse sur g.
On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(|f_n - f|^p)_{n\in\mathbb{N}}$:
– la suite $(|f_n - f|^p)$ converge presque partout vers 0,
– l'hypothèse de domination est vérifiée : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq (2g)^p \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu).$$
Ainsi :
$$\|f_n - f\|_p^p = \int_{\mathrm{X}} |f_n - f|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$