TD 6 : théorèmes de Lebesgue

Exercice 1.— Dérivabilité presque partout

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue dérivable presque partout. On suppose que $f' \in \mathrm{L}^1([0,1])$. Montrer que $\mathrm{F} : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,dt$ est dérivable sur $]0,1]$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2.— La fonction Γ d'Euler

Montrer que la fonction définie par l'intégrale suivante est de classe C^∞ :

$$\begin{array}{rccl} \Gamma : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt. \end{array}$$

Exercice 3.— Transformée de Laplace

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\mathrm{L}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{xt}\,d\mu(t).$$

(a) Montrer que $\mathrm{D} = \left\{x \,\middle|\, \mathrm{L}(x) < \infty\right\}$ est un intervalle non vide.

(b) Vérifier que L est convexe sur D.

(c) Montrer que log(L) est convexe sur D.

(d) Montrer que L est de classe C^∞ sur l'intérieur de D.

Exercice 4.— Théorème de convergence dominée L^p

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu)$ convergeant presque partout vers f et telle que

$$\exists g \in \mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu) : \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g.$$

Montrer qu'alors la suite converge vers f dans l'espace $\mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu)$.