TD 7 : correction

Exercice 1.— Espace mesuré fini

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu)$ une fonction strictement positive telle que $1/f$ soit également intégrable. Les fonctions $f^{1/2}$ et $f^{-1/2}$ sont clairement dans L^2, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne donc

$$\mu(\mathrm{X}) = \int_{\mathrm{X}} 1 \, d\mu = \int_{\mathrm{X}} f^{1/2} \cdot f^{-1/2} \, d\mu \leq \|f^{1/2}\|_2 \cdot \|f^{-1/2}\|_2 \leq \|f\|_1^{1/2} \cdot \|f^{-1}\|_1^{1/2} < \infty.$$

Exercice 2.— Séparabilité des espaces de Lebesgue $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$

Si $p \in [1, +\infty[$, le cours affirme que $\mathrm{C}_c^0(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. Il suffit donc de trouver un ensemble dénombrable $\mathrm{D} \subset \mathrm{C}_c^0(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall f \in \mathrm{C}_c^0(\mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathrm{D} : \|f - g\|_p \leq \varepsilon$$

pour démontrer la séparabilité de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$.
On peut par exemple prendre pour D l'ensemble des fonctions affines et continues à support compact dont les points de discontinuité et les pentes sont rationnels. Les détails sont laissés en exercice.
En revanche, $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable : pour $\mathrm{A} \subset \mathbb{Z}$, posons

$$\mathrm{E}_\mathrm{A} = \bigsqcup_{n \in \mathrm{A}} [n, n+1[\text{ et } f_\mathrm{A} = \mathbb{1}_{\mathrm{E}_\mathrm{A}}.$$

Les $(f_\mathrm{A})_{\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})}$ forment alors une partie non dénombrable de $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \mathrm{A}, \mathrm{A}' \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}), \mathrm{A} \neq \mathrm{A}' \Rightarrow \|f_\mathrm{A} - f_{\mathrm{A}'}\|_\infty = 1.$$

Les boules $\mathrm{B}(f_\mathrm{A}, 1/3)$ forment alors une famille non dénombrable de boules disjointes, ce qui contredit la séparabilité.
$\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ est donc séparable exactement pour $p \in [1, +\infty[$.

Exercice 3.— Continuité de l'opérateur de translation

Évidemment, si f et g coïncident presque partout, il en va de même pour les fonctions translatées $x \mapsto f(x-h)$ et $g \mapsto g(x-h)$. Comme en outre la mesure de Lebesgue est invariante par translation, $\mathrm{T}_h : \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu) \to \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu)$ est donc un opérateur bien défini (c'est même une isométrie).
On a vu (TD 5, exercice 4), que si f est une fonction continue à support compact, on a la convergence

$$\|\mathrm{T}_h(f) - f\|_p \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

(En toute honnêteté, on ne l'a montré que pour la norme L^1, mais la preuve est la même, *mutatis mutandis*, pour les autres normes L^p). On va alors simplement exploiter la densité de ces fonctions dans $L^p(\mathbb{R})$, démontrée en cours.
Soit donc $\varepsilon > 0$. Par densité, soit $g \in C_c^0(\mathbb{R})$ tel que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Comme T_h est une isométrie, on a également pour tout $h \in \mathbb{R}$ l'égalité $\|T_h(f) - T_h(g)\|_p = \|f - g\|_p$. D'après le résultat déjà démontré, il existe une constante $\eta > 0$ telle que $|h| \leq \eta \Rightarrow \|T_h(g) - g\|_p \leq \varepsilon$. Sous l'hypothèse $|h| \leq \delta$, on a donc

$$\begin{aligned}\|T_h(f) - f\|_p &\leq \|T_h(f) - T_h(g)\|_p + \|T_h(g) - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

En revanche, le résultat n'est pas valable pour $p = \infty$: la preuve ne l'est pas parce que les fonctions continues à support compact ne sont pas denses dans $L^\infty(\mathbb{R})$ mais le résultat est en fait faux. En effet, si $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$, on a pour tout $h \neq 0$, $\|T_h(f) - f\|_\infty = 1$.

Exercice 4.— Représentation duale des normes L^p

Si $f \in L^p(X, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mu)$, l'inégalité de Hölder implique

$$\int_X fg\, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

ce qui démontre directement l'inégalité

$$\|f\|_p \geq \sup \left\{ \int_X fg\, d\mu \,\middle|\, \|g\|_q = 1 \right\}.$$

Pour l'inégalité inverse, remarquons que si $f \in L^p(X, \mu)$ la fonction $g = |f|^{p-2} f$ est dans $L^q(X, \mu)$:

$$\|g\|_q = \||f|^{p-1}\|_q = \|f\|_{q(p-1)}^{p-1} = \|f\|_p^{p-1}$$

et que, bien évidemment,

$$\int_X fg\, d\mu = \int_X f^2 |f|^{p-1}\, d\mu = \|f\|_p^p.$$

On a donc

$$\|f\|_p \geq \sup_{g \in L^q(X,\mu) \setminus \{0\}} \frac{\int_X fg\, d\mu}{\|g\|_q} = \sup_{\|g\|_q = 1} \int_X fg\, d\mu.$$

Dans le cas $p = \infty$, on a toujours l'inégalité

$$\|f\|_\infty \geq \sup \left\{ \int_X fg\, d\mu \,\middle|\, \|g\|_1 = 1 \right\}$$

qui n'utilisait que l'inégalité de Hölder (qui est par ailleurs évidente dans ce cas).
Soit maintenant $0 < A < \|f\|_\infty$. Par définition, cela signifie que $\{|f| \geq A\}$ est de mesure strictement positive. Puisque (X, μ) est σ-fini, on peut même trouver [1] $E \subset \{|f| \geq A\}$ dont la mesure appartient à $]0, \infty[$.

1. C'est une façon très faible d'utiliser la σ-finitude, mais c'est tout de même quelque chose qui n'est pas vrai dans un espace mesuré général.

La fonction

$$g = \frac{\mathbb{1}_{\mathrm{E}} \cdot \operatorname{sign}(f)}{\mu(\mathrm{E})}$$

est alors dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu)$, de norme $\|g\|_1 = 1$, et vérifie

$$\int_{\mathrm{X}} fg \, d\mu = \frac{1}{\mu(\mathrm{E})} \int_{\mathrm{E}} |f| \, d\mu \geq \mathrm{A},$$

ce qui démontre l'inégalité réciproque.
Pour obtenir un exemple de phénomène pathologique, remarquons que si l'on munit $\mathbb{N}$ de la mesure $\mu = \infty \cdot \mathrm{card}$ qui vaut 0 sur l'ensemble vide et ∞ sur tout ensemble non vide, l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{N}, \mu)$ est réduit à la fonction nulle (comme tous les espaces $\mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu)$ pour $p < \infty$) mais $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{N}, \mu) = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mu)$ est de dimension infinie.

Exercice 5.— Application du théorème du graphe fermé

Soit (X, μ) et $p, p' \in [1, \infty]$ tels que $\mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu) \subset \mathrm{L}^{p'}(\mathrm{X}, \mu)$. Montrer que l'inclusion

$$\mathrm{inc} : \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu) \to \mathrm{L}^{p'}(\mathrm{X}, \mu)$$

est continue.
A priori, il faudrait montrer que si (f_n) est une suite de fonctions qui converge dans L^p, alors elle converge également dans l'espace $\mathrm{L}^{p'}$. Mais le théorème du graphe fermé permet de simplifier la preuve : en général, ce théorème affirme qu'une application linéaire entre espaces de Banach $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est continue si et seulement si son graphe en fermé. En pratique cela signifie que φ est continue si et seulement si, pour toute suite (x_n) de E telle que (x_n) converge vers $x \in \mathrm{E}$ et $(\varphi(x_n))$ converge vers $y \in \mathrm{F}$, on a $y = \varphi(x)$. Dans notre cas, il faut donc montrer que si (f_n) est une suite de fonctions qui converge à la fois dans L^p et dans $\mathrm{L}^{p'}$, alors les limites sont égales (égales dans $\mathrm{L}^{p'}$, c'est-à-dire presque partout). Pour cela, un résultat du cours nous évite de faire quoi que ce soit : on sait que si (f_n) est une suite de fonctions convergeant vers f dans l'espace L^p, il existe une sous-suite (f_{k_n}) qui converge vers f presque partout. Le résultat désiré est alors une conséquence de l'unicité (modulo égalité presque partout) de la limite presque partout : si $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g_i(x)$ sur le complémentaire d'un négligeable N_i (pour $i \in \{0, 1\}$), on a bien égalité de g_1 et de g_2 sur le complémentaire de $\mathrm{N}_0 \cup \mathrm{N}_1$, ensemble négligeable.

Exercice 6.— Emboîtement des espaces de Lebesgue

(a) Commençons par démontrer que pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ (et que l'inclusion est 1-lipschitzienne) : soit $f \in \ell^p(\mathbb{N})$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On a donc

$$|f(n_0)|^p \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^p = \int_{\mathbb{N}} |f(n)|^p \, d\mathrm{card} = \|f\|_p^p,$$

ce qui implique l'inégalité recherchée

$$\|f\|_\infty = \sup_{n_0 \in \mathbb{N}} |f(n_0)| \leq \|f\|_p.$$

Soit maintenant $p \leq p'$ et supposons $f \in \ell^p$. On a alors

$$\|f\|_{p'}^{p'} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|^{p'} \leq \|f\|_\infty^{p'-p} \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|^p = \|f\|_\infty^{p'-p} \cdot \|f\|_p^p.$$

Remarquons que l'inégalité que nous avons utilisée, évidente, est formellement l'inégalité de Hölder pour les exposants conjugués 1 et ∞. En utilisant la première étape du raisonnement, on a donc

$$\|f\|_{p'}^{p'} \leq \|f\|_\infty^{p'-p} \cdot \|f\|_p^p \leq \|f\|_p^{p'} \text{ donc } \|f\|_{p'} \leq \|f\|_p.$$

Cela démontre l'inclusion $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^{p'}(\mathbb{N})$ et que l'inclusion a une norme ≤ 1. Puisqu'on trouve facilement des éléments dont les normes dans $\ell^p(\mathbb{N})$ et $\ell^{p'}(\mathbb{N})$ coïncident (la suite $(1, 0, 0, \ldots)$, par exemple), on a même l'égalité

$$\|\mathrm{inc}\|_{\ell^p \to \ell^{p'}} = 1.$$

(b) L'inclusion, vue en cours, vient de l'inégalité de Hölder : commençons par remarquer que quitte à remplacer f par $|f|$, on peut supposer $f \geq 0$; maintenant, puisque $f \in \mathrm{L}^{p'}(\mathrm{X})$,

$$\begin{aligned}\int_\mathrm{X} f^p \, d\mu &= \int_\mathrm{X} f^p \cdot 1 \, d\mu \\ &\leq \|f^p\|_{p'/p} \cdot \|1\|_{p'/(p'-p)} \\ &\leq \|f\|_{p'}^p \cdot \mu(\mathrm{X})^{1-p/p'}\end{aligned}$$

d'où il vient

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p'} \cdot \mu(\mathrm{X})^{1/p-1/p'}.$$

On remarque d'ailleurs que cette inégalité est une égalité dans le cas où $f = 1$.
Cela démontre à la fois que $\mathrm{L}^{p'}(\mathrm{X}, \mu) \subset \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu)$ et que l'inclusion est continue de norme $\leq \mu(\mathrm{X})^{1/p-1/p'}$. Puisque l'inégalité est une égalité quand $f = 1$, on a même l'égalité :

$$\|\mathrm{inc}\|_{\mathrm{L}^{p'} \to \mathrm{L}^p} = \mu(\mathrm{X})^{1/p-1/p'}.$$

(c) Soit (X, μ) un espace mesuré et $1 \leq p < p' \leq \infty$ tels que $\mathrm{L}^{p'}(\mathrm{X}, \mu) \subset \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu)$. D'après l'exercice précédent, l'inclusion

$$\mathrm{inc} : \mathrm{L}^{p'}(\mathrm{X}, \mu) \to \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu)$$

est continue.
On a donc une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que

$$\forall f \in \mathrm{L}^{p'}(\mathrm{X}, \mu), \|f\|_p \leq \mathrm{C}\|f\|_{p'}.$$

En particulier, si $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$ est tel que $\mu[\mathrm{A}] \in \mathbb{R}^*$, on obtient en appliquant l'inégalité précédente à $f = \mathbb{1}_\mathrm{A}$:

$$\mu[\mathrm{A}]^{1/p} \leq \mathrm{C}\mu[\mathrm{A}]^{1/p'} \text{ donc } \mu[\mathrm{A}] \leq \mathrm{C}^{\frac{pp'}{p'-p}}.$$

Exercice 7.— Relations entre les espaces L^p

1. Avec les conventions naturelles, on a
$$0 \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} \leq 1.$$
Il est alors clair que l'on peut écrire $1/q$ comme combinaison convexe de $1/p$ et $1/r$.
2. Comme d'habitude, on peut supposer $f \geq 0$. On applique l'inégalité de Hölder à
$$f^q = f^{\theta q} \cdot f^{(1-\theta)q}$$
et aux exposants conjugués
$$s = \frac{p}{\theta q} \text{ et } t = \frac{r}{(1-\theta)q} \qquad \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = q\frac{\theta}{p} + q\frac{1-\theta}{r} = 1\right)$$
pour obtenir
$$\begin{aligned} \|f\|_q^q = \int_{\mathrm{X}} f^q \, d\mu &\leq \|f^{\theta q}\|_s \cdot \|f^{(1-\theta)q}\|_t \\ &= \|f\|_p^{\theta q} \cdot \|f\|_r^{(1-\theta)q}, \end{aligned}$$
ce qui est (la puissance q-ième de) l'inégalité voulue. Cette inégalité est souvent appelée *inégalité d'interpolation.*
3. L'inégalité précédente démontre directement que $\mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu) \cap \mathrm{L}^r(\mathrm{X},\mu) \subset \mathrm{L}^q(\mathrm{X},\mu)$. L'inclusion
$$\text{inc} : \mathrm{L}^p(\mathrm{X},\mu) \cap \mathrm{L}^r(\mathrm{X},\mu) \to \mathrm{L}^q(\mathrm{X},\mu)$$
est alors continue en vertu de l'inégalité (de convexité)
$$\|f\|_p^\theta \cdot \|f\|_q^{1-\theta} \leq \theta \|f\|_p + (1-\theta)\|f\|_q \leq 2\left(\|f\|_p + \|f\|_q\right).$$
4. Il suffit en fait de démontrer que $\mathrm{L}^1(\mathrm{X},\mu) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X},\mu)$ est dense dans tous les $\mathrm{L}^q(\mathrm{X},\mu)$ ($q < \infty$).
Pour cela, soit $f \in \mathrm{L}^q(\mathrm{X},\mu)$ quelconque. On chosit une suite de fonctions simples (f_k) convergeant vers f presque partout, en croissant. Inférieures à f, toutes ces fonctions sont dans $\mathrm{L}^q(\mathrm{X},\mu)$, et elles convergent vers f dans $\mathrm{L}^q(\mathrm{X},\mu)$ en vertu du théorème de convergence dominée L^q. Mais une fonction simple appartient à $\mathrm{L}^q(\mathrm{X},\mu)$ ($q \neq \infty$) si et seulement si elle appartient à $\mathrm{L}^1(\mathrm{X},\mu)$ (c'est encore équivalent au fait que son support soit de mesure finie) et elle appartient automatiquement à $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{X},\mu)$. On a donc $f_k \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X},\mu) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X},\mu)$ et la densité est démontrée.
5. Il suffit d'appliquer l'inégalité : puisque $q \in]p,r[$, le θ défini à la première question est dans $]0,1[$ et
$$\|f_n - f\|_q \leq \|f_n - f\|_p^\theta \cdot \|f_n - f\|_r^{(1-\theta)}.$$
Le premier facteur tendant vers 0 et le second restant borné, on a la convergence recherchée.

6. Si $p, r \in \mathrm{I}_f$, $f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu) \cap \mathrm{L}^r(\mathrm{X}, \mu) \subset \mathrm{L}^q(\mathrm{X}, \mu)$ et $q \in \mathrm{I}_f$. L'ensemble I_f, convexe, est donc un intervalle.
7. Encore une fois, on peut supposer $f \geq 0$. La convergence est tautologique (et sans intérêt) si f est presque nulle. On peut donc supposer $\|f\|_\infty > 0$. Soit alors $0 < \mathrm{A} < \|f\|_\infty$. Par definition de la norme dans $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \mu)$, l'ensemble

$$\left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, f(x) \geq \mathrm{A}\right\}$$

(que l'on notera simplement $\{f \geq \mathrm{A}\}$ dans la suite) a une mesure > 0. On a alors

$$\|f\|_p \geq \left(\mathrm{A}^p \mu\left(\{f \geq \mathrm{A}\}\right)\right)^{1/p} = \mathrm{A} \cdot \mu\left(\{f \geq \mathrm{A}\}\right)^{1/p},$$

suite convergeant vers A. Comme A est arbitrairemement proche de $\|f\|_\infty$, on en déduit

$$\liminf_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty.$$

Pour démontrer l'inégalité inverse, appliquons l'inégalité d'interpolation aux trois exposants $p_0 \leq p \leq \infty$. Dans ce cas, on a simplement $\theta = p_0/p$. Il vient

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{p_0/p} \|f\|_\infty^{1-p_0/p}.$$

Quand p tend vers $+\infty$, p_0/p tend vers 0 donc on obtient bien

$$\limsup_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$